

REPUBLIQUE ALGERIENNE DEMOCRATIQUE ET POPULAIRE
MINISTERE DE L'ENSEIGNEMENT SUPERIEUR ET DE LA RECHERCHE SCIENTIFIQUE



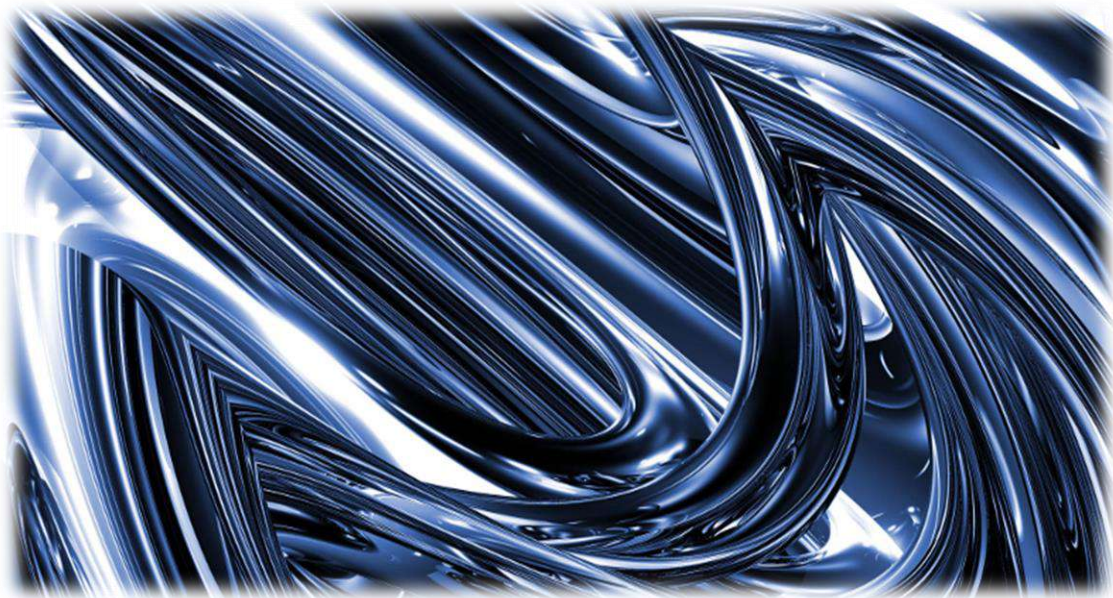
Ecole Supérieure d'Agronomie de Mostaganem
Département des Classes Préparatoires



Polycopié de Cours

MECANIQUE DES FLUIDES THEORIE ET APPLICATIONS

Destiné aux étudiants de la première année des Classes Préparatoires
de l'Ecole Supérieure d'Agronomie de Mostaganem



Rédigé par :
Dr. LABDELLI ABBES
Maître de conférences classe B
Département des Classes Préparatoires - ESAM

Année Universitaire : 2021-2022

Avant-propos

L'hydraulique est incontournable dans l'agronomie. En effet, elle a une place déterminante dans les systèmes d'irrigation. Sa base théorique est la mécanique des fluides qui remonte au moins à l'époque de la Grèce antique avec le célèbre savon Archimède, connu par son principe qui fut à l'origine de l'hydrostatique. La mécanique des fluides fait appel à des bases de la physique comme la force d'Archimède, l'équation de Bernoulli, ...).

Ce polycopié est un support pédagogique dédié au programme de la mécanique des fluides destiné aux étudiants de la première année des classes préparatoires de l'Ecole Supérieure d'Agronomie de Mostaganem. Il est aussi très utile aux étudiants de la troisième année de la même école dans la matière « hydraulique générale ».

Ce document a été divisé en chapitres couvrant des domaines bien établis de théorie et d'étude. Chaque chapitre est développé en cours détaillé couvrant tous les éléments du canevas de formation ministériel suivit d'applications bien sélectionnées et corrigées.

Le chapitre « 1 » traite une introduction à la mécanique des fluides dans laquelle on classe les fluides parfaits, les fluides réels, les fluides incompressibles et les fluides compressibles. Il est consacré aussi à l'étude des propriétés des fluides à savoir la masse volumique, le poids volumique et la viscosité.

Le chapitre « 2 » s'intéresse à l'étude des fluides au repos. Pour cela nous allons définir la pression et la pression en un point d'un fluide. Nous démontrerons ensuite l'équation de l'hydrostatique puis nous traiterons le théorème de Pascal. Les instruments de mesure de la pression statique, la mesure de la pression atmosphérique, le baromètre et la loi de Torricelli seront aussi étudiés dans ce chapitre. Enfin, le centre de poussée et le calcul des forces de pression seront effectués pour les plaques planes horizontale, verticale et oblique.

Dans le chapitre « 3 », nous allons étudier les fluides parfaits en mouvement. On s'intéresse essentiellement à la relation de continuité, à l'équation de Bernoulli (conservation de l'énergie) et au théorème d'Euler (conservation de la quantité de mouvement) à partir duquel on établit les équations donnant la force dynamique exercée par les fluides en mouvement comme les jets d'eau.

Enfin, le chapitre « 4 » est consacré à l'étude des écoulements des fluides réels. Il s'intéresse à la notion du régime d'écoulement et les calculs des pertes de charge due aux forces de frottement. Il traite aussi l'application de l'équation de Bernoulli mais cette fois-ci pour les fluides réels.

La rédaction de ce polycopié était le fruit de lecture de nombreux ouvrages classiques et documents électroniques, tous disponibles à la bibliothèque ou sur le Net. Notre souhait est que ce polycopié constituera un support utile pour nos étudiants ainsi que pour nos collègues enseignants.

Enfin, pour l'amélioration de la qualité de ce polycopié, les critiques, les suggestions et les avis des collègues, des étudiants et des intéressés seront les bienvenus.

Dr. LABDELLI ABBES
Mostaganem, le 02 janvier 2022

Table des matières

Chapitre 1 : Introduction à la mécanique des fluides

Introduction	2
1.1. Propriétés des fluides	2
1.1.1. Le Système d'Unités Internationales (SI)	2
1.1.2. Définitions du fluide	3
1.1.2.1. Fluide parfait	3
1.1.2.2. Fluide réel ou visqueux	3
1.1.2.3. Fluide incompressible	3
1.1.2.4. Fluide compressible	3
1.2. Caractéristiques physiques d'un fluide	3
1.2.1. Masse volumique d'un fluide	3
1.2.2. Densité d'un fluide	4
1.2.3. Poids volumique d'un fluide	5
1.2.4. Viscosité d'un fluide	6
1.2.4.1. Viscosité dynamique d'un fluide	6
1.2.4.2. Viscosité cinématique	8
1.2.4.3. Mesure de la viscosité	8
1.2.4.4. Calcul de la viscosité	9
1.3. Conclusion	10

Chapitre 2 : Statique des fluides (hydrostatique)

Introduction	12
2.1. Notion de pression	12
2.1.1. Définition	12
2.1.2. Pression en un point d'un fluide	13
2.1.3. Pression atmosphérique et pression hydrostatique	14
2.1.3.1. Pression atmosphérique	14
2.1.3.2. Pression hydrostatique	14
2.2. Equation fondamentale de l'hydrostatique	14

2.2.1. Egalité de pression sur un même plan horizontal	16
2.2.2. Pression absolue et pression effective	16
2.3. La Transmission des pressions (principe de Pascal)	18
2.3.1. Définition	18
2.3.2. Illustration	18
2.3.3. Démonstration	19
2.3.4. Application	19
2.4. Poussée D'Archimède	20
2.4.1. Définition	20
2.4.2. Illustration	20
2.4.2.1. L'objet est complètement immergé mais touche le fond (il coule)	21
2.4.2.2. L'objet est complètement immergé et reste entre 2 couches liquides	21
2.4.2.3. Une partie seulement du solide est immergée à l'intérieur du liquide	22
2.4.3. Applications	22
2.5. Dispositifs de mesure de pression	23
2.5.1. Le manomètre simple ou piézomètre	23
2.5.2. Le tube manométrique en forme de « U »	24
2.5.3. Mesure de la différence de pression par un manomètre en U	25
2.5.4. Manomètre à eau et manomètre à mercure	25
2.5.5. Le baromètre	26
2.6. Forces de pression des fluides sur les Surfaces	27
2.6.1. Cas des forces de pression exercées par les fluides sur des surfaces planes	27
2.6.1.1. Cas des surfaces planes immergées inclinées	27
2.6.1.2. Position du point d'application de la force (Centre de poussée)	28
2.6.1.3. Cas des surfaces immergées verticales (Paroi rectangulaire plane verticale)	29
2.6.2. Cas des forces de pression exercées par les fluides sur des surfaces courbes	31
2.6.2.1. Expression de la force de pression	31
2.6.2.2. Composante horizontale	31
2.6.2.3. Composante verticale	32
2.6.2.4. Calcul de la force de pression résultante	32
2.6.3. Application	33

Chapitre 3 : Dynamique des fluides incompressibles parfaits

Introduction	36
3.1. Ecoulement permanent, ligne de courant, tube de courant	36
3.2. Equation de continuité	37
3.3. Notion de débit	38
3.3.1. Débit volumique	38
3.3.2. Débit massique	38
3.3.3. Exemple	39
3.4. Théorème de Bernoulli – Cas d'un Ecoulement sans Echange de Travail	39
3.5. Théorème de Bernoulli – Cas d'un Ecoulement avec Echange de Travail	41
3.5.1. Cas d'une pompe	41
3.5.2. Cas d'une turbine	41
3.6. Applications du théorème de Bernoulli	43
3.6.1. Vidange d'un réservoir (théorème de Torricelli)	43
3.6.2. Tube de Venturi	44
3.6.3. Tube de Pitot	45
3.7. Théorème d'Euler	46

Chapitre 4 : Dynamique des fluides réels incompressibles

Introduction	49
4.1. Régimes d'écoulement - nombre de Reynolds	49
4.1.1. Expérience d'Osborne Reynolds	49
4.1.2. Application	51
4.2. Notion de perte de charges	52
4.2.1. Notion de rugosité des conduites	52
4.2.2. Perte de charges linéaires	52
4.2.2.1. Perte de charge dans le cas d'un écoulement laminaire	53
4.2.2.2. Perte de charge dans le cas d'un écoulement turbulent	54
4.2.2.3. Perte de charge dans le cas d'un écoulement transitoire	54
4.2.3. Pertes de charge singulières	55
4.3. Théorème de Bernoulli appliqué à un fluide réel avec échange de travail	56

Chapitre 1 : Introduction à la mécanique des fluides

Objectifs pédagogiques du chapitre 1

Au terme de ce chapitre, l'étudiant doit être capable de :

- Connaître les différentes classes des fluides
- Comprendre les caractéristiques physiques d'un fluide

Sommaire du chapitre 1

Introduction

1.1. Propriétés des fluides

1.2. Caractéristiques physiques d'un fluide

1.3. Conclusion

Introduction

La mécanique des fluides est un sous-ensemble de la mécanique des milieux continus. C'est la science des lois de l'écoulement des fluides. Elle comprend l'étude du comportement des liquides et des gaz au repos (statique des fluides ou hydrostatique) et en mouvement (dynamique des fluides ou hydrodynamique), ainsi que l'étude de l'interaction de ces derniers avec les corps solides.

La météorologie, l'hydrologie, l'aérodynamique et l'hydraulique sont étroitement liées à la mécanique des fluides.

1.1. Propriétés des fluides

1.1.1. Le Système d'Unités Internationales (SI)

Les unités du système international (SI) sont utilisées dans ce cours. Elles sont rassemblées dans le tableau 1.1 :

Tableau 1.1 : Principales unités dans le système international (SI)

Grandeur physique	Dimension	Unité
Longueur	L	Mètre (m)
Masse	M	Kilogramme (kg)
Temps	T	Seconde (s)
Vitesse	LT^{-1}	$m.s^{-1}$
Accélération	LT^{-2}	$m.s^{-2}$
Force	MLT^{-2}	N (<i>Newton</i>) ou $kg.m.s^{-2}$
Energie	ML^2T^{-2}	N.m ou J (<i>Joule</i>) ou $kg.m^2.s^{-2}$
Puissance	ML^2T^{-3}	$N.m.s^{-1}$ ou W (<i>Watt</i>) ou $kg.m^2.s^{-3}$
Pression	$ML^{-1}T^{-2}$	N/m^2 ou Pa (<i>Pascal</i>) ou $kg.m^{-1}.s^{-2}$
Masse volumique	ML^{-3}	$Kg.m^{-3}$
Poids volumique	$ML^{-2}T^{-2}$	N/m^3 ou $kg.m^{-2}.s^{-2}$
Viscosité dynamique	$ML^{-1}T^{-1}$	$N.s.m^{-2}$ ou $kg.m^{-1}.s^{-1}$
Viscosité cinématique	L^2T^{-1}	$m^2.s^{-1}$

1.1.2. Définitions du fluide

Un fluide est un milieu matériel continu, sans rigidité, parfaitement déformable et qui peut s'écouler. Il a la propriété d'épouser la forme du récipient qui le contient. On regroupe sous cette appellation les gaz qui sont l'exemple des fluides très compressibles et même extensibles (oxygène, Air, ...) et les liquides, qui sont des fluides compressibles et dont la masse volumique est importante (eau, huile, ...).

Les fluides peuvent être classés en deux grandes familles selon leur viscosité :

- Les fluides "newtoniens" (comme l'eau, l'air et la plupart des gaz) ont une viscosité soit constante soit variable qu'en fonction de la température.
 - Les fluides "non newtoniens" (quasiment tout le reste... le sang, les gels, les boues, les pâtes ...) ont leur viscosité variant en fonction de la vitesse de l'écoulement.
- Ce cours est limité uniquement à des **fluides newtoniens** qui sont classés comme suit :

1.1.2.1. Fluide parfait

Un fluide est dit parfait s'il est possible de décrire son mouvement sans tenir compte des effets de frottement (viscosité nulle).

1.1.2.2. Fluide réel ou visqueux

Un fluide réel (ou visqueux) en écoulement (en mouvement) fait intervenir les forces dues aux frottements, qui font apparaître une dissipation de l'énergie mécanique en énergie thermique (la viscosité est prise en compte).

1.1.2.3. Fluide incompressible

Un fluide est dit incompressible lorsque le volume occupé par une masse donnée ne varie pas en fonction de la pression extérieure. C'est le cas des liquides à l'image de l'eau ou de l'huile.

1.1.2.4. Fluide compressible

Un fluide est dit compressible lorsque le volume occupé par une masse donnée varie en fonction de la pression extérieure. Les gaz sont des fluides compressibles comme l'air ou l'hydrogène.

1.2. Caractéristiques physiques d'un fluide

1.2.1. Masse volumique (ρ) d'un fluide

La masse volumique (ρ) d'un fluide est définie comme étant le rapport de la masse (m) de ce fluide par le volume (V) qu'elle occupe. Elle est donnée par la formule suivante :

$$\rho = \frac{m}{V} \quad (1.1)$$

- ρ : Masse volumique en (kg.m^{-3})
- m : Masses-en (kg)
- V : Volume en (m^3)

N.B : La masse volumique des gaz varie avec la pression et la température. Ce n'est pas le cas pour les liquides puisqu'elle varie très peu avec la pression et sensiblement avec la température. Le Tableau 1.2 représente les valeurs de masses volumiques de quelques fluides dans les conditions standards de pression et de température.

Tableau 1.2 : Exemples de masses volumiques de quelques fluides dans les conditions normales de pression et de température (1 atm, 0K)

Fluide	Masse volumique (kg.m^{-3})	Type de fluide
Eau	1000	Incompressible
Huile d'olive	918	
Mercure	13546	
Air	1,205	Compressible
Hydrogène	0,085	
Méthane	0,717	

1.2.2. Densité (d) d'un fluide

La densité d'un fluide est définie comme étant le quotient de la masse volumique de ce fluide à la température ambiante (20°C), par la masse volumique d'un fluide pris comme référence. Pour les liquides, l'eau pure à 4°C est prise comme référence. Pour les gaz, la mesure s'effectue par rapport à l'air à la même température et sous la même pression.

La densité est une grandeur physique sans dimension, donc sans unité, elle est notée (d) et donnée par la formule suivante :

$$d = \frac{\rho_f}{\rho_{ref}} \quad (1.2)$$

- d : Masse volumique (sans unité)
- ρ_f : Masse volumique du fluide (kg.m^{-3})
- ρ_{ref} : Masse volumique du fluide-référence (kg.m^{-3})

1.2.3. Poids volumique ($\bar{\omega}$) d'un fluide

Le poids volumique ($\bar{\omega}$) d'un fluide est définie comme étant le rapport du poids ($m.g$) de ce fluide par unité de volume (V). Il est donné par la formule suivante :

$$\bar{\omega} = \frac{m \cdot g}{V} = \rho \cdot g \quad (1.3)$$

- $\bar{\omega}$: Poids volumique en ($N.m^{-3}$)
- m : Masse en (kg)
- g : accélération de la pesanteur en ($m.s^{-2}$)
- V : Volume en (m^3)

Application

Le poids d'un volume $V=12 \text{ m}^3$ d'un liquide est $P=94 \text{ KN}$; sachant que $g= 9.81 \text{ m/s}^2$.

Calculer

1. Sa masse volumique ;
2. Son poids volumique ;
3. Sa densité.

Solution

1. La masse volumique ρ du liquide

$$\rho = \frac{m}{V} = \frac{P}{g \cdot V}$$

Application numérique :

$$\rho = \frac{94 \cdot 10^3}{9,81 \cdot 12}$$

$$\rho = 798,5 \text{ kg/m}^3$$

2. Le poids volumique $\bar{\omega}$ du liquide

$$\bar{\omega} = \frac{P}{V} = \frac{m \cdot g}{V} = \rho \cdot g$$

Application numérique :

$$\bar{\omega} = 798,5 \cdot 9,81$$

$$\bar{\omega} = 7833,285 \text{ N/m}^3$$

3. La densité d du liquide

$$d = \frac{\rho}{\rho_{eau}}$$

Application numérique :

$$d = \frac{798,5}{1000}$$

$$d = 0,7985$$

1.2.4. Viscosité d'un fluide

La viscosité est une grandeur qui caractérise la résistance due aux frottements internes, d'un fluide à son écoulement lorsqu'il est soumis à l'application d'une force. Elle est mesurée par un viscosimètre à chute de bille. Il faut savoir que plus la viscosité d'un fluide est petite et plus ce fluide s'écoule facilement, c'est le cas de l'exemple suivant :

La viscosité de l'eau < la viscosité de l'huile < la viscosité du miel.



1.2.4.1. Viscosité dynamique d'un fluide

On considère deux couches adjacentes d'un même fluide distantes de ΔZ . Le coefficient de viscosité dynamique du fluide (μ) est donc proportionnel à cette distance ΔZ et à la force de frottement \vec{F} qui s'exerce à la surface de séparation de ces deux couches (cette force s'oppose au glissement d'une couche sur l'autre) et inversement proportionnelle à la différence de vitesse des couches soit ΔV et à leur surface S (**Fig.1.1**).

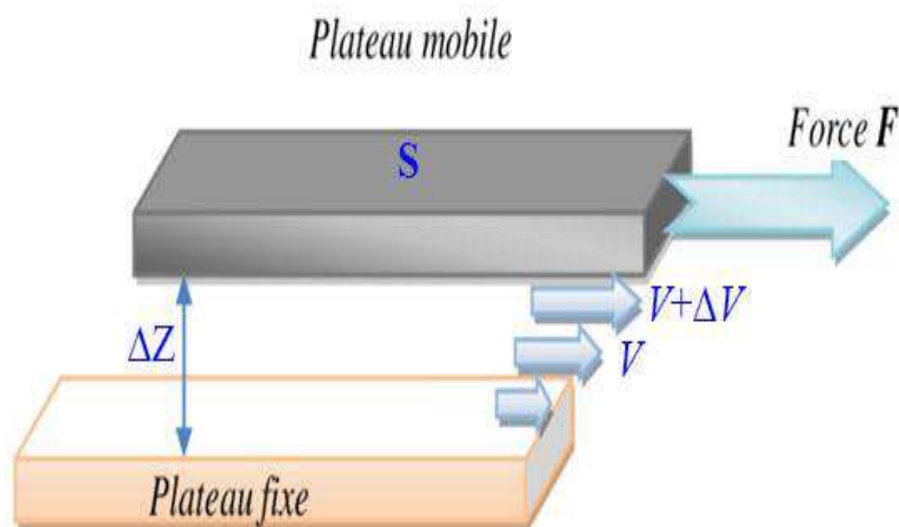


Fig.1.1 : Répartition des vitesses des couches du fluide

Donc le coefficient de viscosité dynamique du fluide (μ) est donné par la formule suivante :

$$\mu = \frac{F \cdot \Delta Z}{S \cdot \Delta V} \quad (1.4)$$

- μ : Viscosité dynamique en ($\text{kg} \cdot \text{m}^{-1} \cdot \text{s}^{-1}$) ou en ($\text{Pa} \cdot \text{s}$) ou en Poiseuille (PI) : $1 \text{ Pa} \cdot \text{s} = 1 \text{ PI}$
- F : force de glissement entre les couches en (N)
- S : Surface de contact entre deux couches en (m^2)
- ΔV : Écart de vitesse entre deux couches en ($\text{m} \cdot \text{s}^{-1}$)
- ΔZ : Distance entre deux couches en (m)

N.B: le rapport $\tau = F/S$ s'appelle la contrainte de cisaillement

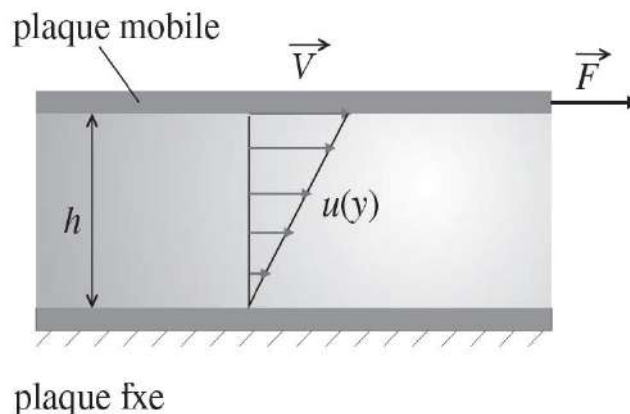
Le tableau 1.3 affiche des exemples de Viscosité dynamique de quelques fluides

Tableau 1.3 : Exemples de Viscosités dynamiques de quelques fluides

Fluide	μ (Pa·s)
Eau (0°C)	$1,787 \cdot 10^{-3}$
Eau (20°C)	$1,002 \cdot 10^{-3}$
Eau (100°C)	$0,2818 \cdot 10^{-3}$
Huile d'olive (20°C)	$\approx 100 \cdot 10^{-3}$
Hydrogène (20°C)	$0,86 \cdot 10^{-5}$
Oxygène (20°C)	$1,95 \cdot 10^{-5}$

Exercice d'application

On suppose que de l'huile ayant une viscosité $\mu = 0.29 \text{ Pa} \cdot \text{s}$ s'écoule entre les deux plaques dont l'une est soumise à la force \vec{F} (voir la figure ci-dessous).



Calculer la contrainte visqueuse τ dans l'huile si la vitesse de la plaque supérieure est de $V=3\text{m/s}$ et que la distance entre plaques est de $h = 2 \text{ cm}$.

Solution : La contrainte visqueuse τ dans l'huile

L'accélération est nulle et en supposant qu'il n'y a pas de variation de pression dans la direction de l'écoulement, on peut montrer (par un équilibre de force sur un élément de fluide) que la contrainte de cisaillement τ est constante à travers tout le fluide.

$$\mu = \frac{F \cdot \Delta Z}{S \cdot \Delta V} = \tau \frac{\Delta Z}{\Delta V} \leftrightarrow \tau = \mu \frac{\Delta V}{\Delta Z} = \mu \frac{V}{h}$$

$$\text{Application numérique : } \tau = 0,29 \cdot \frac{3}{0,02} = 43 \text{ Pa}$$

1.2.4.2. Viscosité cinématique

La viscosité cinématique (ν) caractérise le temps d'écoulement d'un liquide. Lorsque la température augmente, elle décroît car sa densité diminue. Elle est définie comme étant le rapport entre la viscosité dynamique (μ) et la masse volumique (ρ).

$$\nu = \frac{\mu}{\rho} \quad (1.5)$$

- ν : viscosité cinématique en ($\text{m}^2 \cdot \text{s}^{-1}$)
- μ : Viscosité dynamique en ($\text{Pa} \cdot \text{s}$)
- ρ : Masse volumique en ($\text{kg} \cdot \text{m}^{-3}$)

Remarques :

1. Généralement, on utilise le Stokes (St) comme unité de mesure de la viscosité cinématique sachant que : $1 \text{ St} = 10^{-4} \text{ m}^2/\text{s}$.
2. La viscosité diminue avec la température : aux températures usuelles, une variation de 1K peut faire varier la viscosité de 50%.
3. La viscosité augmente avec la pression de façon linéaire et très lente.
4. La variation de la viscosité en fonction de la pression est moins importante que celle due à la température.

1.2.4.3. Mesure de la viscosité

Pour mesurer la viscosité, on utilise un viscosimètre à chute de bille (Figure 1.2) dont le principe est : Dans un tube on introduit de l'huile et une bille en acier de diamètre un peu inférieur à celui du tube. Ce tube comporte deux traits repères A et B distants de L. On

mesure le temps de chute de la bille entre A et B on calcule la vitesse limite considérée constante le long de (L) et on déduit la viscosité dynamique en appliquant le principe de la dynamique.

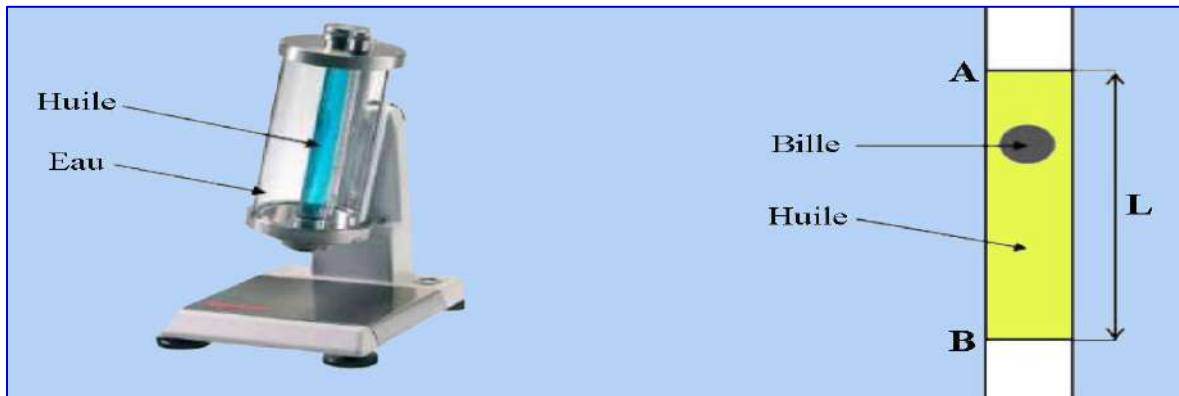


Fig.1.2. Viscosimètre à chute de bille

1.2.4.4. Calcul de la viscosité

Appliquons le principe de la dynamique : $\sum \vec{F} = m\vec{a}$

➤ Les forces qui agissent sur la bille de rayon r pendant son mouvement dans un fluide (huile) sont :

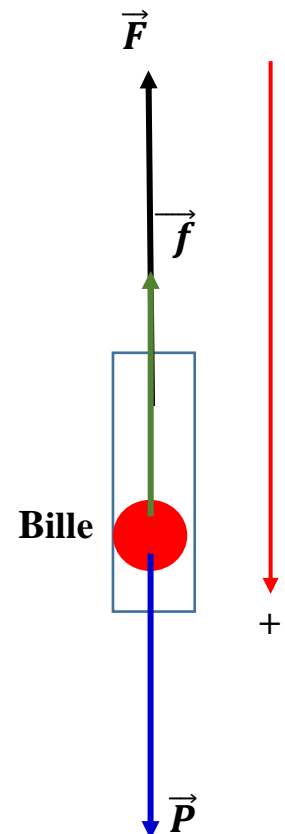
- Le poids P de la bille : $P = m \cdot g = \rho_{bille} \cdot V_{bille} \cdot g$
- La poussée d'Archimède : $F = \rho_{fluide} \cdot V_{bille} \cdot g$
- La force de frottement visqueuse : $f = 6\pi \cdot r \cdot \mu \cdot v$

➤ Entre A et B (Fig.1.2), le mouvement est à vitesse constante, on a donc :

$$\begin{aligned} \sum \vec{F} &= \vec{0} \\ \Leftrightarrow \sum \vec{F} &= \vec{P} + \vec{F} + \vec{f} \\ \Leftrightarrow +P - F - f &= 0 \\ \Leftrightarrow +\rho_{bille} \cdot V_{bille} \cdot g - \rho_{fluide} \cdot V_{bille} \cdot g - 6\pi \cdot r \cdot \mu \cdot v &= 0 \\ \Leftrightarrow \mu &= \frac{(\rho_{bille} - \rho_{fluide}) V_{bille} \cdot g}{6\pi \cdot r \cdot v} \quad \text{or} \quad V_{bille} = \frac{4}{3} \pi r^3 \end{aligned}$$

➤ D'où la viscosité devient :

$$\mu = \frac{2(\rho_{bille} - \rho_{fluide}) r^2 \cdot g}{9} \frac{\Delta t}{L}$$



Enfin $\mu = C \frac{\Delta t}{L}$ où C est une constante

1.3. Conclusion

Les fluides peuvent être classés en fluides parfaits (sans frottement), fluides réels (avec frottement), fluides incompressibles (liquides) et fluides compressibles (gaz). Ils sont caractérisés par leur masse volumique, leur poids volumique, leur densité et leur viscosité.

Chapitre 2 : Statique des fluides (hydrostatique)

Prérequis

- Généralités sur les fluides.
- Principe fondamental de la statique
- Principe fondamental de la dynamique

Objectifs pédagogiques du chapitre 2

Au terme de ce chapitre, l'étudiant doit être capable de :

- Appliquer l'équation générale de l'hydrostatique
- Déterminer la force de pression exercée sur une paroi plane
- Déterminer la force de pression exercée sur une paroi courbe
- Déterminer la poussée d'Archimède appliquée sur les solides immergés dans un fluide
- Avoir une idée sur les dispositifs de mesure de pression.

Sommaire du chapitre 2

Introduction

2.1. Notion de pression

2.2. Equation fondamentale de l'hydrostatique

2.3. Transmission des pressions (principe de Pascal)

2.4. Poussée D'Archimède

2.5. Dispositifs de mesure de pression

2.6. Forces de pression des fluides sur les Surfaces

Introduction

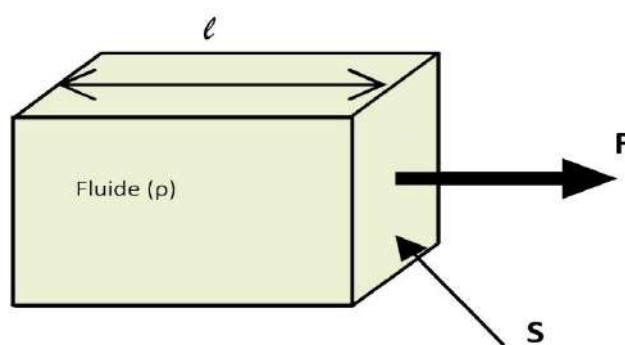
Ce chapitre s'intéresse à l'étude des fluides au repos, lorsque le fluide n'est animé d'aucun mouvement. Cela s'inscrit dans le cadre de la statique des fluides ou hydrostatique.

Dans cette partie de la mécanique du fluide, nous allons avant tout définir la pression et la pression en un point d'un fluide. Nous démontrerons ensuite l'équation de l'hydrostatique en se basant sur le principe fondamental de la statique appliquée à un petit élément du volume du fluide, puis nous traiterons le théorème de Pascal. Les instruments de mesure de la pression statique, la mesure de la pression atmosphérique, le baromètre et la loi de Torricelli seront aussi étudiés dans ce cours. Enfin, le centre de poussée et le calcul des forces de pression seront effectués pour : les plaques planes horizontale, verticale et oblique. Le champ d'applications est très large et concerne par exemple le calcul de la force résultante appliquée sur un barrage ainsi que le calcul de la pression dans des réservoirs.

2.1. Notion de pression

2.1.1. Définition

La pression est une grandeur scalaire. Elle est définie comme étant une force dirigée vers l'extérieur qui s'exerce perpendiculairement à la surface de la paroi. C'est le rapport de la force par unité de surface.



$$P = \frac{F}{S} \quad (2.1)$$

Où

- P : Pression (Pa)
- F : Force (N)
- S : Surface (m^2)

Fig.2.1 : Pression d'un fluide en équilibre

N.B : Dans le système international les pressions sont évaluées en (N/m^2) ou en Pascal (Pa).

Il existe cependant d'autres unités de mesure de la pression, on citera entre autres :

- Le bar: $1 \text{ bar} = 100\,000 \text{ Pa} = 1 \text{ kg/cm}^2$;
- L'atmosphère : $1 \text{ atm} = 101\,325 \text{ Pa}$;
- Le mètre de colonne d'eau (mCE) : $1 \text{ mCE} = 9810 \text{ Pa}$
- Le millimètre de mercure (mmHg) : $1 \text{ mmHg} = 133 \text{ Pa}$

2.1.2. Pression en un point d'un fluide

Dans un fluide en équilibre la pression est indépendante de la direction. Pour montrer cela, on prend un élément d'un fluide situé à une certaine profondeur d'un réservoir plein de ce même fluide ouvert à l'atmosphère.

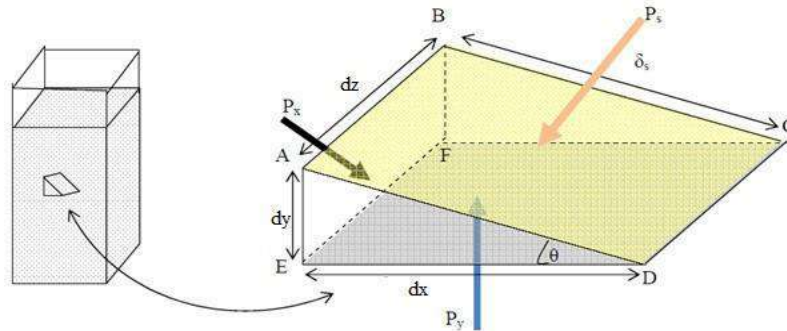


Figure 2.1 : Pression en un point d'un liquide en équilibre

Considérons donc un élément d'un fluide ABCDEF (prisme triangulaire) et soient P_x , P_y et P_s les pressions dans les 3 directions x , y et s .

Etablissons la relation entre P_x , P_y et P_s :

➤ **Selon la direction x :**

- Force due à P_x : $F_{xx} = P_x(ABFE) = P_x \cdot dydz$

Force due à P_y : $F_{yx} = 0$

- Composante due à P_s : $F_{sx} = -P_s(ABCD \cdot \sin\theta) = -P_s \cdot dsdz \frac{dy}{ds}$

Donc : $F_{sx} = -P_s \cdot dydz$

Et puisque le fluide est en équilibre : $F_{xx} + F_{yx} + F_{sx} = 0$

$$D'où : P_x \cdot dydz - P_s \cdot dydz = 0 \rightarrow P_x = P_s \quad (2.2)$$

➤ **Selon la direction y :**

- Force due à P_y : $F_{yy} = P_y(DCFE) = P_y \cdot dx dz$

- Force due à P_x : $F_{xy} = 0$

- Composante due à P_s : $F_{sy} = -P_s(ABCD \cdot \cos\theta) = -P_s \cdot dsdz \frac{dx}{ds}$

Donc : $F_{sy} = -P_s \cdot dx dz$

Et puisque le fluide est en équilibre : $F_{yy} + F_{xy} + F_{sy} = 0$

$$D'où : P_y \cdot dx dz - P_s \cdot dx dz = 0 \rightarrow P_y = P_s \quad (2.3)$$

$$\text{➤ Finalement : } P_x = P_y = P_s \quad (2.4)$$

La pression d'un fluide en un point est la même dans toutes les directions.

On peut vérifier que la pression exercée au sein d'un liquide en équilibre est :

- Constante en tous points d'un même plan horizontal.
- Indépendante de la direction considérée.
- Croît au fur et à mesure que l'on s'éloigne en profondeur de sa surface libre.

2.1.3. Pression atmosphérique et pression hydrostatique

2.1.3.1. Pression atmosphérique

Chaque cm^2 de surface de notre peau supporte environ 1 kg force représentant le poids de l'atmosphère. C'est la pression atmosphérique au niveau de la mer. Nous ne la ressentons pas car notre corps est incompressible et ses cavités contiennent de l'air à la même pression.

Si on s'élève de 5 000 m, la pression atmosphérique est deux fois plus faible qu'au niveau de la mer car la masse d'air au-dessus de notre tête diminue de moitié. D'où la nécessité d'une pressurisation des avions.

Au niveau de la mer : $P_{\text{atm}} = 1 \text{ atm} \approx 1,013 \text{ bar} = 760 \text{ mmHg}$

2.1.3.2. Pression hydrostatique

En plongée sous-marine, la pression hydrostatique est mesurée généralement en bar : $1 \text{ bar} = 1 \text{ kg/cm}^2$. Il faut savoir que la pression s'élève au fur et à mesure qu'on descend en profondeur car il faut tenir compte du poids de l'eau au-dessus de nous : à 10 mètres de profondeur, chaque cm^2 de notre peau supportera un poids égal à :

$1 \text{ cm}^2 \cdot 10 \text{ m (profondeur)} = 1 \text{ cm}^2 \cdot 100 \text{ cm} = 100 \text{ cm}^3 = 1 \text{ litre d'eau} = 1 \text{ kg d'eau}$, d'où la pression hydrostatique due à l'eau à 10 m de profondeur est donc de $1 \text{ kg/cm}^2 = 1 \text{ bar}$.

Remarque : La pression hydrostatique (comme la pression atmosphérique) s'exerce dans toutes les directions (et pas simplement de haut en bas).

2.2. Equation fondamentale de l'hydrostatique

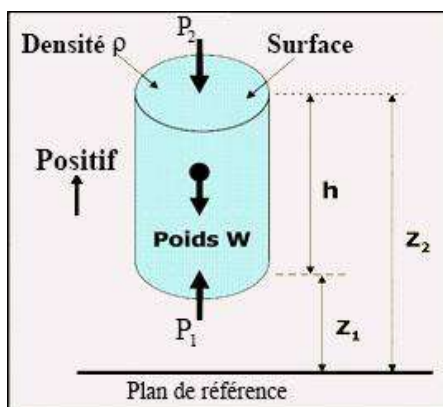


Fig.2.2 : Equation Fondamentale de l'Hydrostatique

On considère un élément d'un fluide de masse volumique ρ représentant une colonne verticale (Parallèle à l'axe Oz) de section transversale constante S.

Considérons 2 sections situées à des distances Z_1 et Z_2 par rapport à un plan de référence OY. Soient P_1 et P_2 les pressions dans ces 2 sections.

- Le fluide étant en équilibre, la somme des forces dans la direction verticale est donc égale à Zéro

$$\sum_1^n \vec{F}_i = \vec{0} \quad (2.5)$$

• Force due a P₁: F₁= P₁.S (2.2)

• Force due a P₂: F₂= P₂.S (2.3)

• Force due au poids de la colonne du liquide : W = mg = ρgV = ρgS (Z₂ - Z₁) (2.4)

Avec V = Volume du fluide

- Si l'on considère le sens positif vers le haut, la condition d'équilibre s'écrit :

• F₁ - F₂ - W = 0 ↔ P₁.S - P₂.S - ρgS (Z₂-Z₁) = 0 (2.5)

↔ P₁ - P₂ = ρg (Z₂ - Z₁) = ρgh (2.6)

↓

C'est l'équation fondamentale de l'hydrostatique (Principe de la statique)

Avec :

- P₁ - P₂ = Différence de pression en (Pa)
- Z₂ - Z₁ = h = Hauteur entre les deux points 1 et 2 en (m)
- ρ = Masse volumique du fluide en (kg/m³)
- g = Accélération de la pesanteur (9,81 N/kg)

Remarques

1. Autre forme plus générale de l'équation fondamentale de l'hydrostatique

$$P_1 - P_2 = \rho g (Z_2 - Z_1) = \rho g h \quad \leftrightarrow \quad P_1 + \rho g Z_1 = P_2 + \rho g Z_2 \quad (2.7)$$

$$\leftrightarrow \frac{P_1}{\rho g} + Z_1 = \frac{P_2}{\rho g} + Z_2 \quad (2.8)$$

$$\leftrightarrow \frac{P}{\rho g} + h = \text{Cte} \quad (2.9)$$

Avec :

- h : hauteur de position
- P/ρg : Hauteur piézométrique
- P/ρg + h : Hauteur ou charge total

Sur un même plan horizontal, le terme Z+P/ρg reste constant.

2. Variation de la pression

En posant : $Z_2 - Z_1 = h$ et $P_2 = P_0$

$$\text{On aura : } P_1 = P_0 + \rho g h \quad (2.10)$$

$$\text{Et si : } P_0 = 0, P_1 = \rho g h \quad (2.11)$$

La pression augmente donc linéairement en fonction de la profondeur

2.2.1. Egalité de pression sur un même plan horizontal

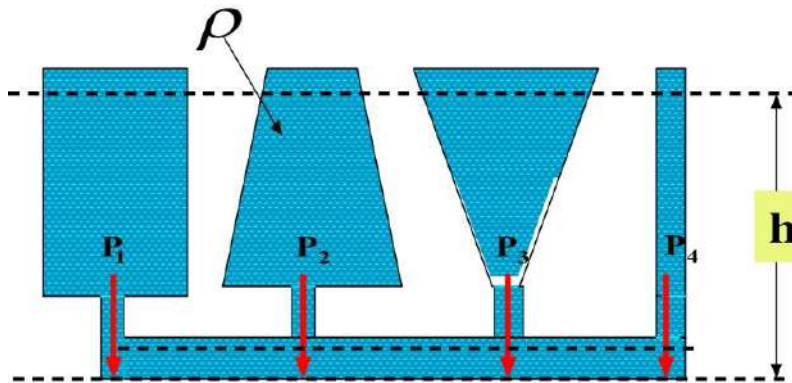


Fig.2.3 : la pression d'un fluide est indépendante de la forme du récipient

$$P_1 = P_2 = P_3 = P_4 = \rho g h \quad (2.12)$$

- Les surfaces libres d'un même fluide dans les différents tubes des vases sont planes. Pour une altitude donnée, la pression est la même dans chaque forme des tubes.
- La pression dans un fluide homogène ne dépend donc que de la différence de hauteur et de la masse volumique ; elle est indépendante de la taille ou de la forme du récipient.
- On peut conclure que :

Sur un même plan horizontal, toutes les pressions sont égales (Pressions Isobares).

2.2.2. Pression absolue et pression effective

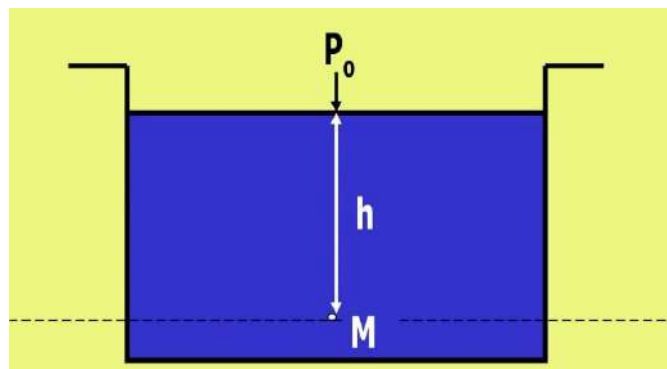


Fig.2.4 : Pression absolue et pression effective

La pression absolue est définie par rapport à la pression dans le vide qui correspond à la pression nulle. La pression absolue minimale possible est donc zéro. Il est courant de mesurer la pression de liquide relativement à la pression atmosphérique (pression de l'air).

On parle alors de pression relative. De cette façon, la pression à la surface libre d'un liquide est égale à zéro.

On sait que :

- Au point M, la pression est égale à : $P_M = P_0 + \rho g h$ (2.13)

- A la surface libre du fluide, la pression est généralement représentée par la pression atmosphérique P_{atm} , d'où :

$$P_M = P_{atm} + \rho g h \rightarrow \textit{Pression Absolue}$$

Et si l'on néglige l'influence de la pression atmosphérique ($P_{atm} = 0$)

$$P_M = \rho g h \rightarrow \textit{Pression Effective}$$

Remarque

Dans certains cas, la pression absolue est inférieure à la pression atmosphérique :

$$P_M = P_{atm} + \rho g h < P_{atm} \quad (2.14)$$

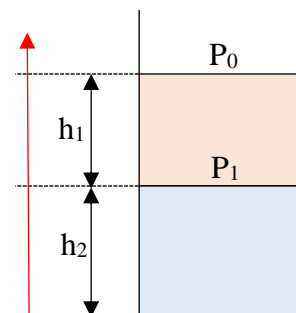
Il se crée alors une dépression dont la hauteur correspondante est appelée hauteur du Vide :

$$h_{vide} = \frac{P_{atm} - P_{abs}}{\rho g} \quad (2.15)$$

Exemple : Le ballon dans la cloche à vide

Application 1

Un récipient contient de l'eau jusqu'à 2m et par-dessus de l'huile jusqu'à 3 m. La densité de l'huile $d_h=0,83$. Calculez la pression absolue et relative au fond du récipient.



Corrigé 1

➤ L'application de l'EFH entre 1 et 0 donne : $P_1 = P_0 + \rho_{huile} g h_1$

➤ L'application de l'EFH entre 2 et 1 donne : $P_2 = P_1 + \rho_{eau} g h_2 = P_0 + d \rho_{eau} g h_1 + \rho_{eau} g h_2$

- La pression absolue : $P_0 = 10^5$ Pa

$$P_2 = 10^5 + 0,83 \cdot 10^3 \cdot 9,81 \cdot (1) + 10^3 \cdot 9,81 \cdot (2) = 1277623 \text{ Pa} = 1,28 \text{ bar}$$

- La pression relative : $P_0 = 0$

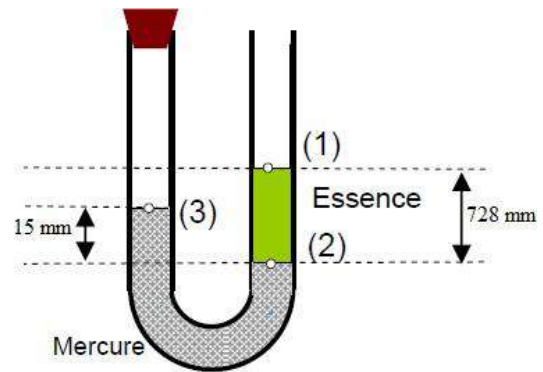
$$P_2 = 0 + 0,83 \cdot 10^3 \cdot 9,81 \cdot (1) + 10^3 \cdot 9,81 \cdot (2) = 277623 \text{ Pa} = 0,28 \text{ bar}$$

Application 2

Soit un tube en U fermé à une extrémité qui contient deux liquides non miscibles. Calculer la pression P_3 du gaz emprisonné dans la branche fermée.

On donne : $\rho_{Hg} = 13600 \text{ Kg/m}^3$

et $\rho_{essence} = 700 \text{ Kg/m}^3$, $P_{atm} = 10^5 \text{ Pa}$.

**Corrigé 2**

➤ Appliquons la loi fondamentale de l'hydrostatique (EFH) entre 1 et 2, puis 2 et 3 :

$$P_2 = P_1 + \rho_{ess} g (0,728) \quad (1)$$

$$P_2 = P_3 + \rho_{Hg} g (0,015) \quad (2)$$

➤ Alors :

$$P_3 = P_2 - \rho_{Hg} g (0,015)$$

$$P_3 = P_1 + \rho_{ess} g (0,728) - \rho_{Hg} g (0,015)$$

$$P_3 = 10^5 + 700 \cdot 9,81 \cdot 0,728 - 13600 \cdot 9,81 \cdot 0,015$$

$$P_3 = 1,3 \cdot 10^5 \text{ Pa}$$

2.3. La Transmission des pressions (principe de Pascal)**2.3.1. Définition**

Le principe de Pascal ou le principe de transmission de pression de fluide est un principe de mécanique des fluides qui indique que la pression exercée n'importe où dans un fluide incompressible enfermé est transmis intégralement dans toutes les directions à travers le fluide.

2.3.2. Illustration

Lorsqu'on gonfle un ballon, on augmente la pression à l'entrée de celui-ci. L'air se répartit uniformément dans le ballon. La pression exercée par l'air sur la paroi du ballon sera alors égale dans toutes les directions.

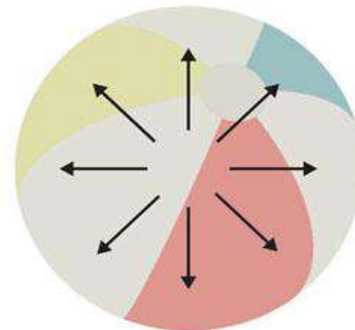


Fig.2.5. La répartition de la pression exercée par un fluide dans un ballon

2.3.3. Démonstration

Soient par exemple, deux cylindres de sections différentes S et S' formant des vases communicants :

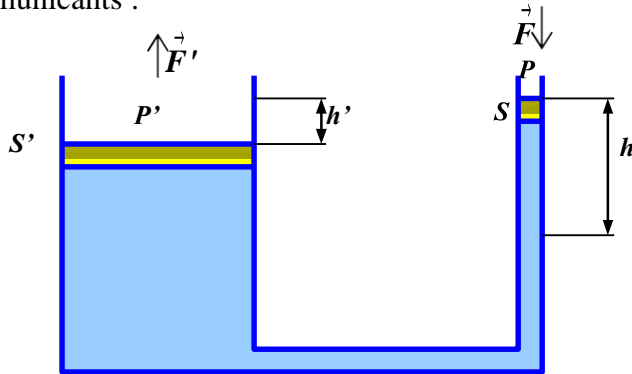


Figure 2.5 : Principe du théorème de Pascal

Blaise Pascal : 1623- 1662

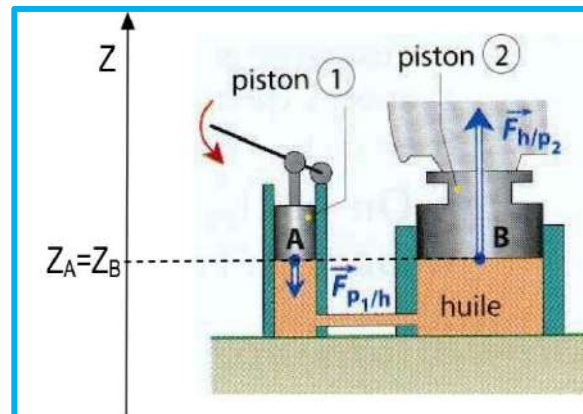
Exerçons sur le petit piston P une force F perpendiculaire à sa surface, cela crée une surpression qui vaut : $Dp = F/S$. En vertu du théorème de Pascal, sur P' on a donc la même variation de pression ce qui produit une force F' , et on peut donc écrire : $Dp = F/S = F'/S'$.

On voit donc que si $S' > S$ on a $F' > F$ mais le déplacement de P' est plus petit que celui de P , si on enfonce P de h , P' ne monte que de h' :

Il y a conservation du travail (ou de l'énergie) : $F.h = F'.h'$.

2.3.4. Application

La figure ci-contre représente un cric hydraulique formé de deux pistons (1) et (2) de section circulaire. Sous l'effet d'une action sur le levier, le piston (1) agit, au point (A), par une force de pression $\vec{F}_{p_1/h}$ sur l'huile. L'huile agit, au point (B) sur le piston (2) par une force \vec{F}_{h/p_2} .



On donne :

- Les diamètres de chacun des pistons : $D_1 = 10 \text{ mm}$; $D_2 = 100 \text{ mm}$
- L'intensité de la force de pression en A : $F_{p_1/h} = 150 \text{ N}$

1/ Déterminer la pression P_A de l'huile au point A.

2/ Quelle est la pression P_B ?

3/ En déduire l'intensité de la force de pression F_{h/p_2}

Corrigé

1/ La pression P_A de l'huile au point A :

$$P_A = \frac{4 \cdot F_{p_{1/h}}}{\pi \cdot D_1^2} = \frac{4 \cdot 150}{\pi \cdot 0,01^2} = 19 \cdot 10^5 \text{ Pa}$$

2/ la pression P_B :

$$RFH \text{ entre A et B : } P_A - P_B = \bar{\omega} (Z_B - Z_A) \text{ or } Z_A = Z_B$$

$$\text{Donc } P_B = P_A = 19 \cdot 10^5 \text{ Pa}$$

3/ l'intensité de la force de pression F_{h/p_2}

$$F_{h/p_2} = P_B \frac{\pi \cdot D_2^2}{4} = 19 \cdot 10^5 \frac{\pi \cdot 0,1^2}{4} = 14922,56 \text{ N}$$

Commentaire

On constate que la force $F_{p_{1/h}} = 150 \text{ N}$ est relativement faible par rapport à $F_{h/p_2} = 14922,56 \text{ N}$.

Avec ce système nous avons atteint un rapport de réduction de force de presque 100. Ce rapport correspond au rapport des diamètres des cylindres. On utilise souvent le même principe de réduction d'effort dans plusieurs applications hydrauliques (presse hydraulique).

2.4. Poussée D'Archimède**2.4.1. Définition**

Quiconque a déjà tenté d'atteindre en nageant le fond d'une piscine pour y récupérer ses lunettes s'est rendu compte à quel point c'était difficile. En effet, une force tend à s'opposer au corps qui descend vers le fond et à pousser ce corps vers la surface. Cette force de poussée verticale qui s'applique à tout objet immergé dans un fluide s'appelle la poussée d'Archimède.

2.4.2. Illustration

On écrit en général la formule de la poussée d'Archimède en fonction de g et V_f de la manière suivante : $F_{\text{Archimède}} = \rho_{\text{fluide}} \cdot g \cdot V_{\text{fluide déplacé}}$ (2.16)

On remarque que le terme $\rho_f V_f$ est simplement le produit de la masse volumique du fluide par le volume de fluide déplacé, ce qui correspond à la masse du fluide déplacé. On peut donc remplacer dans la formule (2.15) le terme $\rho_f V_f$ par m_f la masse de fluide déplacé, ce qui donne : $F_A = m_f \cdot g$ (2.17)

Il est clair que la poussée d'Archimède est égale au produit de la masse de fluide déplacé par l'accélération de la pesanteur, ce qui est en fait le poids du fluide déplacé ! On peut donc réécrire la formule (2.16) de la manière suivante : $F_A = P_f$ (2.18)

Cette équation illustre le **théorème d'Archimède** dont l'énoncé est le suivant : Tout corps plongé dans un fluide subit une force verticale, dirigée vers le haut, et dont l'intensité est égale au poids du volume de fluide déplacé ; cette force est appelée poussée d'Archimède. Pour connaître la valeur de la poussée d'Archimède subie par un objet, il suffit donc de calculer le poids du fluide que cet objet a déplacé.

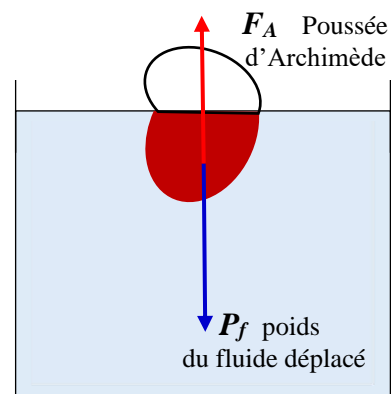


Fig.2.6 : Poussée D'Archimède

Remarque

Tout dépendra de la grandeur de la force de poussée et du poids de l'objet pour que :

- L'objet peut couler (complètement immergé et touche le fond) ;
- L'objet se maintient à une même profondeur (complètement immergé et reste entre 2 couches liquides) ;
- L'objet flotte (une partie seulement du solide est immergée à l'intérieur du liquide).

2.4.2.1. L'objet est complètement immergé mais touche le fond (il coule)

Le poids de l'objet est plus grand que le poids du fluide qu'il déplace (poussée). La force vers le bas est donc plus grande que la force vers le haut. La force résultante est dirigée vers le bas et l'objet coule vers le fond : $P_f > F_A$ (2.19)
Pour que l'objet soit complètement immergé et touche le fond, il faut que : $\rho_{\text{objet}} > \rho_{\text{fluide}}$

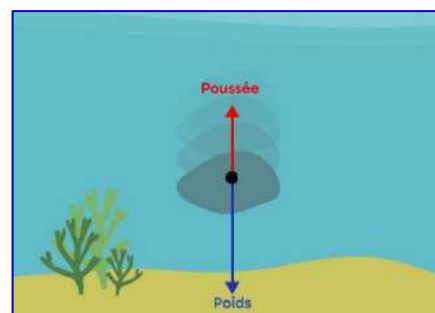


Fig.2.7 : Forces sur un objet qui coule

2.4.2.2. L'objet est complètement immergé et reste entre 2 couches liquides

Le poids de l'objet est égal au poids du fluide qu'il déplace (poussée). La force vers le bas et la force vers le haut sont de même grandeur. Elles s'annulent et l'objet se maintient à la profondeur où il est : $P_f = F_A$ (2.20)
Pour que l'objet se maintient à une même profondeur, il faut que : $\rho_{\text{objet}} = \rho_{\text{fluide}}$

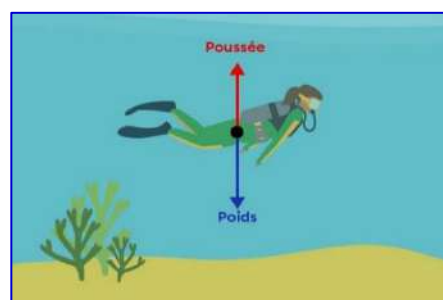


Fig.2.8 : La répartition des forces sur un objet qui se maintient à une même profondeur

2.4.2.3. Une partie seulement du solide est immergée à l'intérieur du liquide

Le poids de l'objet est plus petit que le poids du fluide qu'il déplace (poussée). La force vers le bas est plus petite que la force vers le haut. La force résultante est dirigée vers le haut et l'objet remonte vers la surface.

$$P_f < F_A \quad (2.21)$$

Pour que l'objet flotte, il faut que :

$$\rho_{\text{objet}} < \rho_{\text{fluide}}$$

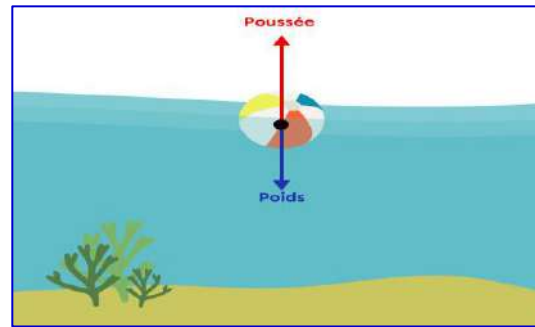


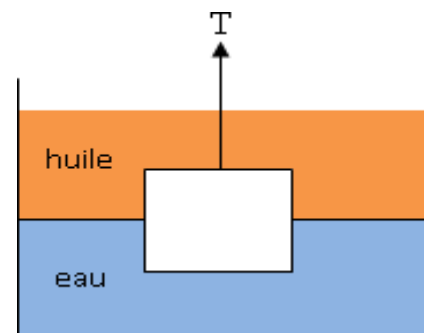
Fig.2.9 : La répartition des forces sur un objet qui flotte

Remarque

1. Il ne faut pas oublier que la masse volumique ρ dans la formule de la poussée d'Archimède, $F_{\text{Archimède}} = \rho_{\text{fluide}} \cdot g \cdot V_{\text{fluide déplacé}}$ fait référence à la masse volumique du fluide déplacé, et non à celle de l'objet immergé.
2. Il faut garder à l'esprit que le volume dans la formule de la poussée d'Archimède est celui du fluide déplacé (en d'autres termes le volume de la partie immergée de l'objet), et que ce volume n'est pas nécessairement celui de l'objet entier.
3. On a tendance à penser que l'intensité de la poussée d'Archimède augmente à mesure que l'objet sur lequel elle est appliquée coule plus profondément dans le fluide. Mais la poussée d'Archimède ne dépend pas de la profondeur. Elle ne dépend que du volume de fluide déplacé $V_{\text{fluide déplacé}}$, de la masse volumique du fluide ρ_{fluide} et de l'accélération g .

2.4.3. Applications

1. Un cube métallique de 15 cm de côté est suspendu par une corde. Le cube est immergé à moitié dans l'huile (densité 0,8) et moitié dans l'eau. Si la masse volumique du métal est de 2640 kg/m^3 . Trouvez la force de tension dans la corde.



Corrigé

La force de tension dans la corde égale à la différence entre le poids du cube et la poussée d'Archimède : $T = P - F_A$

$$\text{Ainsi : } P = Mg = \rho Wg = 2640 \cdot 0,15^3 \cdot 9,81 = 87,4 \text{ N}$$

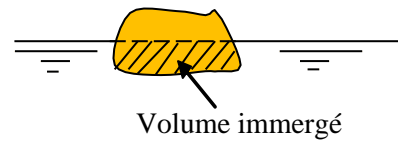
$$F_A = F_{A1} + F_{A2}$$

Avec F_{A1} et F_{A2} sont les poussées d'Archimède égale au poids de volume de l'eau et de l'huile déplacée :

$$F_A = 1000 \cdot 9,81 \cdot \frac{0,15^3}{2} + 800 \cdot 9,81 \cdot \frac{0,15^3}{2} = 29,79 \text{ N}$$

$$T = 87,4 - 29,79 = 57,61 \text{ N}$$

2. Quelle est la fraction de volume d'un morceau de métal solide de densité 7,25 qui flotte à la surface d'un récipient de mercure de densité 13,6.



Corrigé

Le morceau de métal en équilibre quand le poids de ce morceau est égal à la force d'Archimède :

$$F_A = Poids \Rightarrow \rho_{Hg} g V_{immergé} = \rho_{métal} g V_{total}$$

$$\frac{V_{immergé}}{V_{total}} = \frac{\rho_{métal}}{\rho_{Hg}} = \frac{7,25}{13,6} = 0,533$$

La fraction de volume immergée dans le mercure est 53,3%

2.5. Dispositifs de mesure de pression

Il existe 2 types de dispositifs de mesure des pressions :

1. Les tubes manométriques : utilisés pour la mesure de pressions relativement faibles (en laboratoires).

2. Les manomètres mécaniques : utilisés pour la mesure de pressions relativement plus élevées (1 à 2 Kg/cm²)

2.5.1. Le manomètre simple ou piézomètre

C'est l'instrument de mesure de la pression le plus simple, c'est un tube raccordé au point où on veut déterminer la pression, celle-ci n'est autre que la hauteur d'eau qui monte dans ce tube. C'est un dispositif utilisé uniquement pour la mesure des pressions des Liquides et non les gaz.



Fig.2.10. Piézomètre

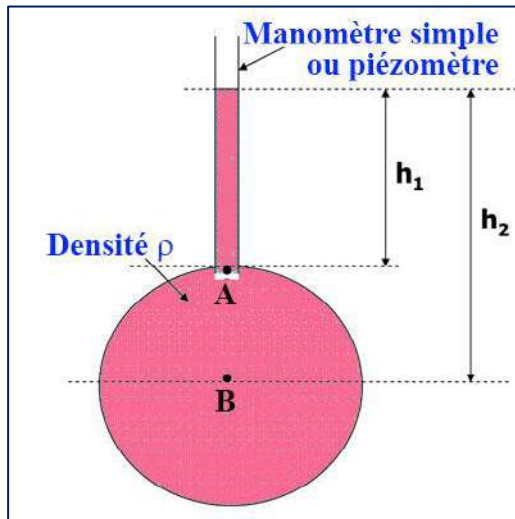


Fig.2.11. Manomètre simple ou piézomètre schématisé

$$P_A = \rho g h_1 \quad (2.22)$$

$$P_B = \rho g h_2 = P_A + \rho g (h_2 - h_1) \quad (2.23)$$

- P_A et P_B s'appellent les pressions manométriques.
- h_1 et h_2 s'appellent les hauteurs manométriques.

2.5.2. Le tube manométrique en forme de « U »

Il s'agit d'un dispositif utilisé pour la mesure des pressions dans les liquides et les gaz.

C'est un tube en U dont une extrémité est raccordée au point de mesure et l'autre à l'air libre, le tube contient soit du mercure ou autre liquide plus dense que le fluide dont la pression est à mesurer pour la mesure des pressions manométriques.



Fig.2.12. Tube manométrique en forme de « U »

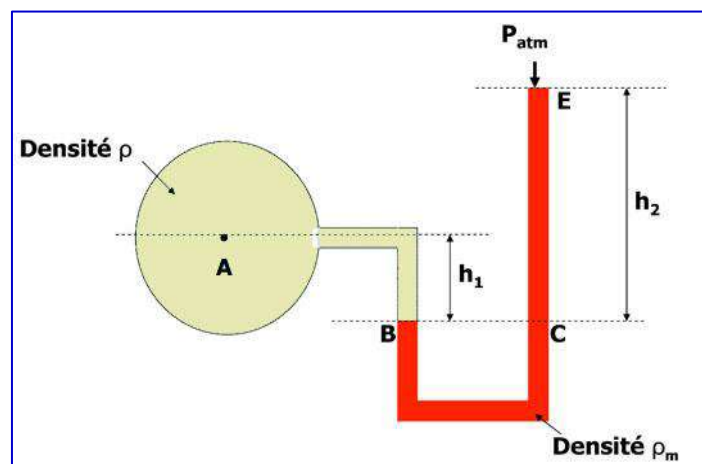


Fig.2.13. Tube manométrique en forme de « U » schématisé

D'après la loi de l'hydrostatique, on peut écrire : $P_B = P_C$ (2.24)

Partie de gauche : $P_B = P_A + \rho g h_1$ (2.25)

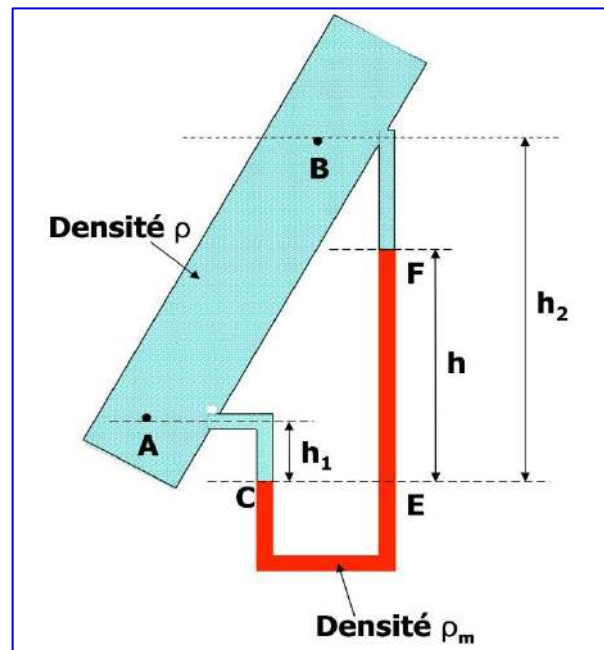
Partie de droite : $P_C = P_E + \rho_m g h_2 = P_{atm} + \rho_m g h_2$ (2.26)

Et si on ne tient pas compte de P_{atm} , $P_C = \rho_m g h_2$ (2.27)

Donc : $P_B = P_C \rightarrow P_A + \rho g h_1 = \rho_m g h_2$ (2.28)

2.5.3. Mesure de la différence de pression par un manomètre en U

On demande de calculer $P_A - P_B$



On peut écrire : $P_C = P_E$

Partie de gauche : $P_C = P_A + \rho g h_1$ (2.29)

Partie de droite : $P_E = P_B + \rho g(h_2 - h) + \rho_m g h$ (2.30)

Comme $P_C = P_E$

$P_A + \rho g h_1 = P_B + \rho g(h_2 - h) + \rho_m g h$ (2.31)

Donc : $P_A - P_B = \rho g(h_2 - h_1) + (\rho_m - \rho) g h$ (2.32)

2.5.4. Manomètre à eau et manomètre à mercure

Les manomètres à eau sont utilisés pour mesurer des pressions relativement faibles car leur utilisation pour les fortes pressions conduirait à l'élaboration de tubes de dimensions trop exagérées. C'est pour cela, et compte tenu de sa densité élevée, que l'on préfère utiliser du mercure comme liquide manométrique.



Fig.2.14. Manomètre à eau



Fig.2.15. Manomètre à mercure

Application

Quelle serait la hauteur manométrique donnée pour mesurer une pression $P = 120 \text{ KN/m}^2$:

1. Dans le cas d'un manomètre à eau
2. Dans le cas d'un manomètre à Mercure

1. Cas de l'Eau

$$P = \rho_w g h \rightarrow h = \frac{P}{\rho_w g} = \frac{120 \cdot 10^3}{9,81 \cdot 10^3}$$

$$h = 12,23 \text{ m}$$

2. Cas du mercure

$$P = \rho_{Hg} g h \rightarrow h = \frac{P}{\rho_{Hg} g} = \frac{120 \cdot 10^3}{9,81 \cdot 13546}$$

$$h = 0,9 \text{ m}$$

2.5.5. Le baromètre

C'est l'instrument utilisé pour mesurer la pression atmosphérique. Le type le plus commun est sans doute le baromètre à mercure. Ce dernier a été mis en évidence par l'italien Evangelista Torricelli en 1644. Il remplit de mercure un tube de verre d'un mètre de long, fermé à une extrémité (Fig.2.16). Il le retourne et le plonge dans une cuvette remplie de mercure. Il constate alors que le niveau de mercure dans le tube s'abaisse, laissant un espace de vide au-dessus de lui. Il vient de découvrir la pression atmosphérique.

La pression atmosphérique est obtenue en mesurant la hauteur h de Hg :

$$P_{Atm} = \rho_{Hg} g h \tag{2.33}$$

Au niveau de la mer : $P_{atm} = 1 \text{ atm} = 1,0133 \cdot 10^5 \text{ Pa}$, soit 762mm de Hg.

N.B: On peut ajouter à ce baromètre un système mécanique ou électronique d'enregistrement automatique des données : le barographe.

Les pressions les plus fortes sont enregistrées par temps froid.

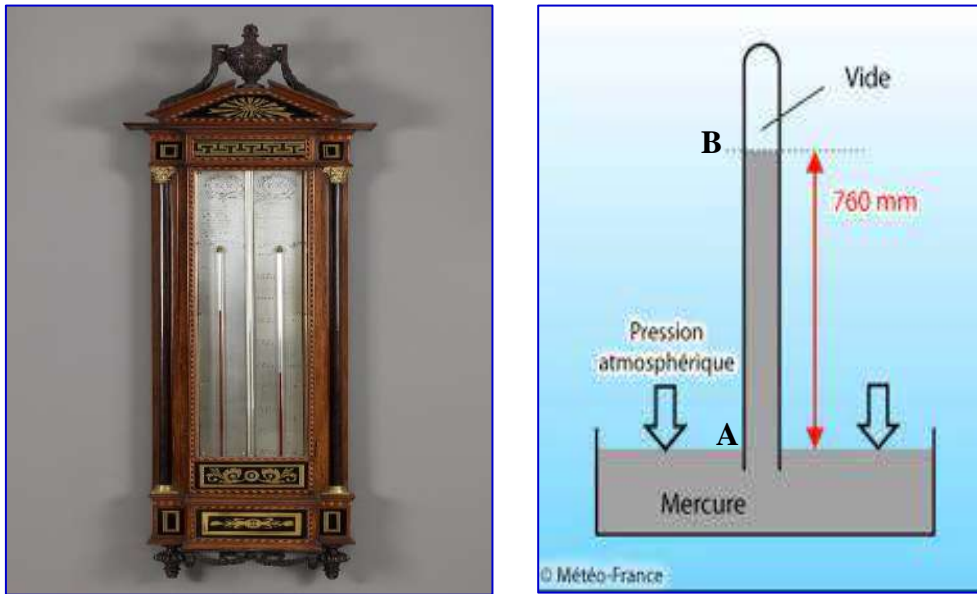


Fig.2.16. Baromètre à mercure

Interprétation

Déterminons la pression atmosphérique en appliquant le principe de la statique entre A et B

$$P_A + \rho_m g z_A = P_B + \rho_m g z_B$$

$$P_{\text{atm}} = P_{\text{vide}} + \rho_m g (z_A - z_B)$$

$$P_{\text{atm}} = P_{\text{vide}} + \rho_m g h$$

$$P_{\text{atm}} = 0 + 13600 \times 9,8 \times 0,76$$

$$P_{\text{atm}} = 101292 \text{ Pa C'est la valeur de la pression atmosphérique.}$$

2.6. Forces de pression des fluides sur les Surfaces

2.6.1. Cas des forces de pression exercées par les fluides sur des surfaces planes

Dans la vie courante, un liquide comme l'eau par exemple a besoin d'être contenu dans un récipient (contenant). Ce contenant doit alors pouvoir contenir ce liquide sans se fissurer ou se disloquer. La connaissance des forces de pression qui s'appliquent sur les parois du contenant est donc nécessaire pour son dimensionnement.

2.6.1.1. Cas des surfaces planes immergées inclinées (Paroi plane en position inclinée)

Considérons une paroi de surface A et de centre de gravité c, immergée dans un liquide et inclinée d'un angle θ par rapport à l'horizontale. Découpons la surface A en élément

suffisamment petit dA . La force de pression sur l'élément est déterminée à l'aide de la formule suivante :

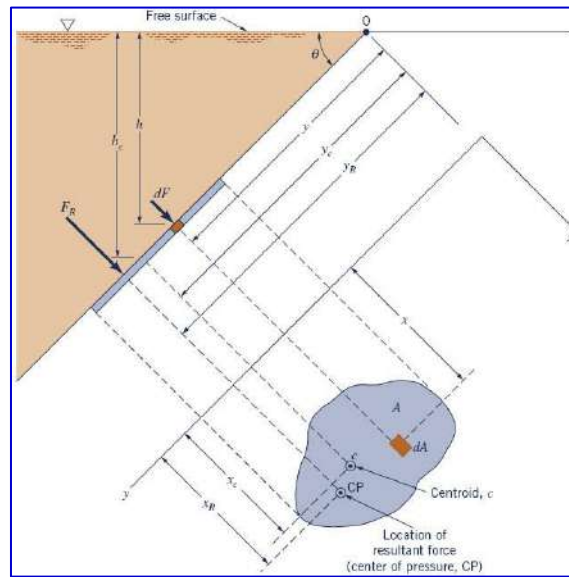


Fig.2.17. Force de pression hydrostatique sur une surface plane inclinée de forme quelconque

$$dF = P \cdot dA = \rho \cdot g \cdot h \cdot dA = \rho \cdot g \cdot y \cdot \sin(\theta) \cdot dA \quad (2.34)$$

L'intensité de la force de pression agissant sur la surface A est :

$$F_R = \int_A dF = P \cdot dA = \rho \cdot g \int_A h \cdot dA = \rho \cdot g \int_A y \cdot \sin\theta \cdot dA \quad (2.35)$$

Cet intégral représente le moment statique qui est défini comme suit :

$$\int_A h \cdot dA = h_c \cdot A = y_c \cdot \sin\theta \cdot A \quad (2.36)$$

D'où l'équation s'écrit :

$$F_R = \rho \cdot g \cdot h_c \cdot A \quad (2.37)$$

La force de pression sur une surface plane à orientation arbitraire est égale au produit de la surface de la paroi par la pression que subit sont centre de gravité.

2.6.1.2. Position du point d'application de la force (Centre de poussée)

La force F_R ne s'exerce pas au centre de gravité mais à un point appelé centre de poussée $CP = (x_R, y_R)$. Pour déterminer les coordonnées du centre de pression on considère le moment de la force par rapport à l'axe x puis y et on écrit ainsi :

$$F_R \cdot y_R = \int_A y \cdot dF \quad (2.38)$$

$$\rho \cdot g \cdot y_c \cdot \sin(\theta) \cdot A \cdot y_R = \rho \cdot g \cdot \sin(\theta) \cdot \int_A y^2 \cdot dA \quad (2.39)$$

$$y_R = \frac{\int_A y^2 \cdot dA}{A \cdot y_c} \quad (2.40)$$

L'intégrale du numérateur est le moment d'inertie par rapport à x :

$$y_R = \frac{I_x}{A \cdot y_c} \quad (2.41)$$

Dans les calculs, il est plus commode de remplacer le moment d'inertie I_x par le moment d'inertie I_{xc} par rapport à l'axe parallèle à celui-ci qui passe par le centre de gravité de la surface en utilisant, à cet effet, l'équation suivante :

$$I_x = I_{xc} + A \cdot y_c^2 \quad (2.42)$$

L'équation précédente devienne :

$$y_R = \frac{I_{xc}}{A \cdot y_c} + y_c \quad (2.43)$$

N.B : La même procédure permet de définir la coordonnée x_R .

$$x_R = \frac{I_{xyc}}{A \cdot y_c} + x_c \quad (2.43)$$

Le point d'application de la résultante F ou centre de poussée a pour coordonnées :

$$CP = (x_R = \frac{I_{xyc}}{A \cdot y_c} + x_c ; y_R = \frac{I_{xc}}{A \cdot y_c} + y_c)$$

➤ Surface et moment d'inertie de quelques figures particulières

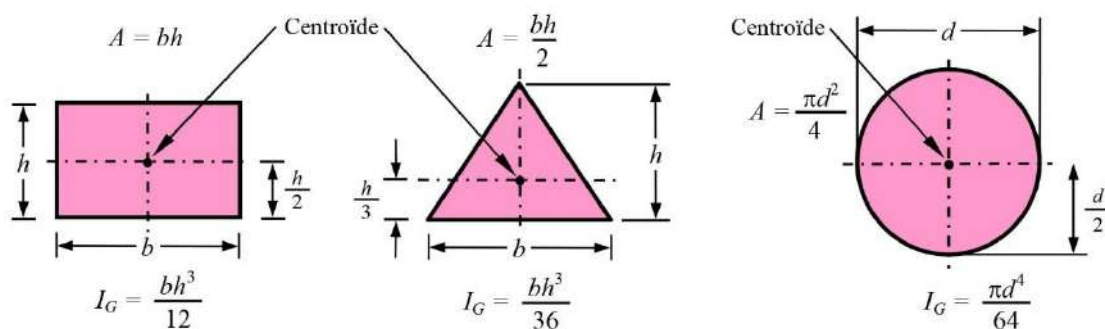


Fig.2.18 : Calcul du moment d'inertie de différentes géométries

2.6.1.3. Cas des surfaces immergées verticales (Paroi rectangulaire plane verticale)

Ça sera le même raisonnement que pour la surface Inclinée mais avec $\Theta = 90^\circ \rightarrow \sin\alpha = 1$

Considérons donc une paroi rectangulaire plane verticale immergée verticalement (Fig.2.18)

$$\text{Alors : } F_R = \rho \cdot g \cdot h_c \cdot A = \rho \cdot g \cdot \frac{h_1 + h_2}{2} \cdot A \quad (2.44)$$

$$F_R = \frac{\rho \cdot g \cdot h_1 + \rho \cdot g \cdot h_2}{2} \cdot A \tag{2.45}$$

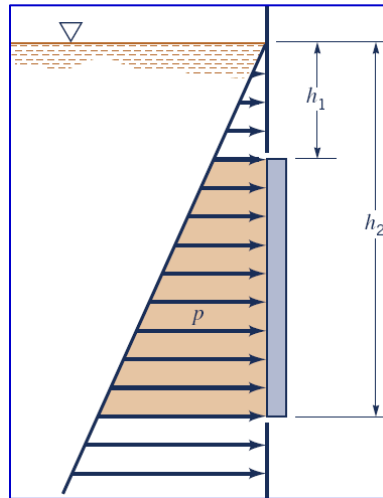


FIG.2.18. Force de pression hydrostatique sur une surface plane verticale

N.B: Dans le cas des surfaces partiellement immergées, seule la surface mouillée est prise en compte (surface jaune).

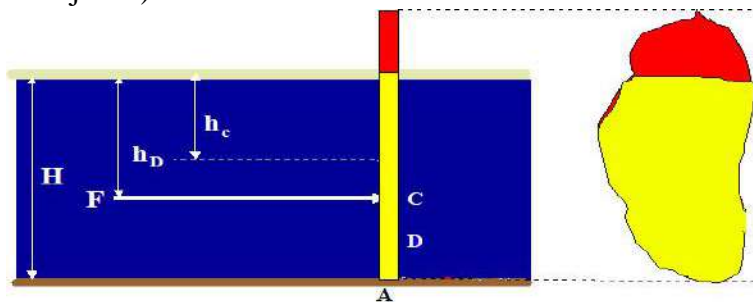


FIG.2.19. Force de pression sur une surface plane verticale partiellement immergée

$$F_R = \rho \cdot g \cdot h_c \cdot A \text{ (A est la surface jaune)}$$

2.6.1.4. Cas des surfaces immergées horizontales (Paroi plane horizontale)

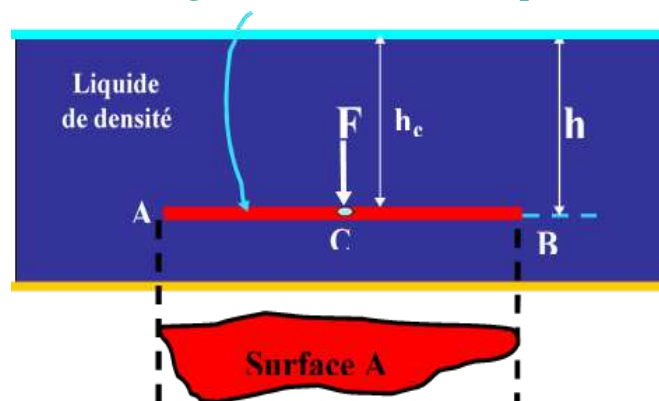


FIG.2.20. Force de pression hydrostatique sur une surface immergée horizontale

Considérons une paroi de largeur unitaire et de surface A immergée horizontalement à une profondeur h. La force de la pression hydrostatique sur la paroi horizontale A est :

$$F = P.S = \rho g h_c A \text{ avec } h_c = h \rightarrow F = \rho . g . h . A \quad (2.46)$$

Cela veut dire que la force de pression sur une paroi horizontale correspond au poids de la colonne de liquide de hauteur h.

La profondeur du point d'application est : $h_D = h_c = h$ (2.47)

2.6.2. Cas des forces de pression exercées par les fluides sur des surfaces courbes

La résultante des forces de pression sur une surface courbe est plus aisée à calculer en découpant la force en ses composantes verticales et horizontales.

2.6.2.1. Expression de la force de pression

Considérons le schéma de la figure 2.21 représentant un bloc de liquide et soumis à diverses forces :

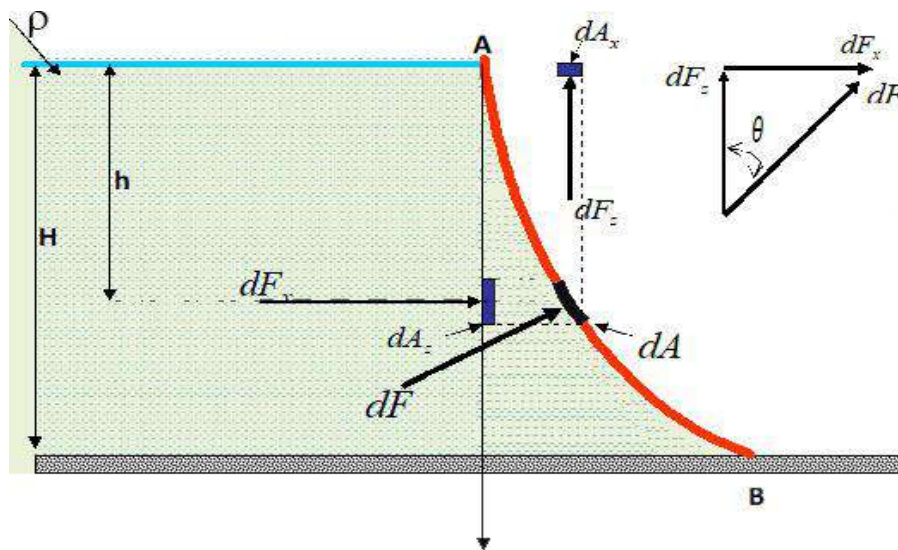


FIG.2.21. Force de pression hydrostatique

dF → Composante horizontale : $dF_x = dF \sin\theta$ (2.48)

dF → Composante verticale : $dF_z = dF \cos\theta$ (2.49)

2.6.2.2. Composante horizontale

$$dF_x = dF \sin\theta = \rho . g . h . d . A \sin\theta = \rho . g . h . d . A_z \quad (2.50)$$

$$\int dF_x = F_H = \rho \cdot g \int_A h \cdot dA_z \quad (2.51)$$

$$D'où : F_H = \rho \cdot g h_c A_z \quad (2.52)$$

avec A_z : Projection verticale de la surface courbe AB

h_c : Profondeur du centre de gravité de A_z

Le calcul de la composante horizontale F_H est ramené au calcul d'une force de pression sur une surface plane verticale.

2.6.2.3. Composante verticale

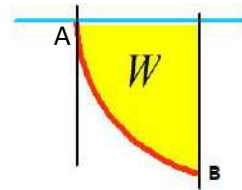
$$dF_z = dF \cos\theta = \rho \cdot g \cdot h \cdot dA \cos\theta = \rho \cdot g \cdot h \cdot dA_x \quad (2.53)$$

$$\int dF_z = F_V = \rho \cdot g \int_W dW = \rho \cdot g \cdot W \quad (2.54)$$

$$D'où : F_V = \rho \cdot g \cdot W \quad (2.55)$$

Avec W : Volume délimité par :

- La surface courbe AB
- La surface libre du fluide
- Les 2 verticales menées des 2 extrémités A et B de la surface.



Le calcul de la composante verticale F_V se résume donc au calcul du Poids du fluide représenté par le volume déplacé par la surface AB.

2.6.2.4. Calcul de la force de pression résultante

Le calcul des 2 composantes F_H et F_V permet ensuite de déterminer la résultante F par l'expression : $F = \sqrt{F_H^2 + F_V^2}$ (2.56)

Position du point d'application de la Force de Pression

Le point d'application de la résultante F est obtenu si l'on connaît les composantes F_H et F_V .

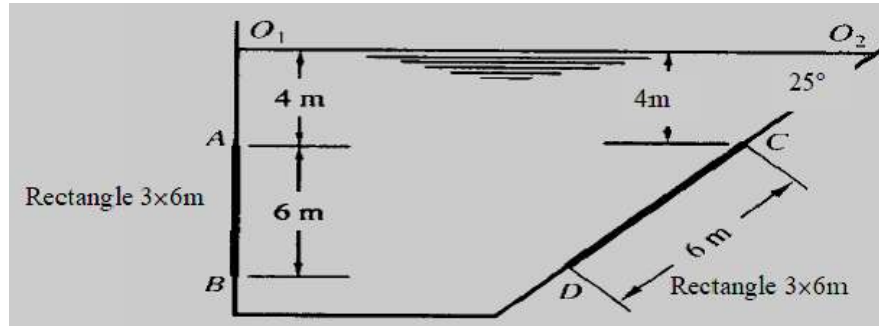
Dans le cas général, il faudra établir l'équation de la courbe AB et celle du segment représentant la force F (équation d'une droite) en tenant compte que l'angle d'inclinaison de la force résultante F par rapport à l'horizontale est obtenu par la formule suivante :

$$\theta = \arctg \frac{F_V}{F_H} \quad (2.57)$$

2.6.3. Application

Un réservoir est équipé par deux vannes rectangulaires (3m ×6m) en AB et CD.

1. Calculer la force de pression sur AB et CD
2. Déterminer le centre de poussée sur AB et CD
3. La vanne CD est remplacée par une vanne circulaire, quel serait le diamètre de la vanne pour garder la même force calculée en 1)
4. Déterminer le nouveau centre de poussée sur CD



Solution

1. La surface AB

$$F = \rho g h_G S$$

$$h_G = 4 + 3 = 7 \text{ m et } S = 18 \text{ m}^2$$

$$\text{Donc } F = 1000 \cdot 9,81 \cdot 7 \cdot 18 = 1,236 \text{ MN}$$

$$y_p = h_p = h_G + \frac{I_{xG}}{h_G \cdot S} = 7 + \frac{3,6^3}{7,18} = 7,43 \text{ m suivant l'axe } O_1$$

2. La surface CD

$$F = \rho g h_G S$$

$$h_G = 4 + 3 \sin 25^\circ = 5,26 \text{ m et } S = 18 \text{ m}^2$$

$$\text{Donc } F = 1000 \cdot 9,81 \cdot 5,26 \cdot 18 = 928,81 \text{ kN}$$

$$y_p = h_G + \frac{I_{xG}}{h_G \cdot S} = \frac{h_G}{\sin 25^\circ} = 12,46 \text{ m suivant l'axe } O_2$$

3. La surface CD est circulaire

$$F = \rho g h_G S$$

$$h_G = 4 + R \sin 25^\circ \text{ et } S = \pi R^2$$

Alors

$$F = \rho g (4 + 0,422 \cdot R) \pi R^2 \rightarrow 4 R^2 + 0,422 \cdot R^3 = \frac{F}{\rho g \pi} = \frac{928,81 \cdot 10^3}{10^3 \cdot 9,81 \cdot 3,14} = 30,15$$

On trouve finalement :

$$R^3 + 9,47 R^2 - 71,44 = 0$$

La racine de cette équation de 3^{ième} degré est $R = 2,45\text{m}$

Donc le diamètre de la porte CD est : $D = 4,9 \text{ m}$

$$y_p = y_G + \frac{I_{xG}}{y_G \cdot S} = \frac{h_G}{\sin 25^\circ} + \frac{\frac{\pi R^4}{4}}{11,92 \cdot \pi R^2} = 11,92 + \frac{2,45^2}{4 \cdot 11,92}$$

Donc $y_p = 12,05 \text{ m}$ suivant l'axe O_2

Chapitre 3 : Dynamique des fluides incompressibles parfaits

Prérequis

- Généralités sur les fluides
- Statique des fluides
- Théorème de l'énergie cinétique

Objectifs pédagogiques du chapitre 3

Au terme de ce chapitre, l'étudiant doit être capable de :

- Appliquer l'équation de continuité
- Comprendre la Notion de débit
- Appliquer le théorème de Bernoulli – Cas d'un Ecoulement sans Echange de Travail
- Appliquer le théorème de Bernoulli – Cas d'un Ecoulement avec Echange de Travail
- Théorème d'Euler

Sommaire du chapitre 3

Introduction

3.1. Ecoulement permanent, ligne de courant, tube de courant

3.2. Equation de continuité

3.3. Notion de débit

3.4. Théorème de Bernoulli – Cas d'un Ecoulement sans Echange de Travail

3.5. Théorème de Bernoulli – Cas d'un Ecoulement avec Echange de Travail

3.6. Applications du théorème de Bernoulli

3.7. Théorème d'Euler

Introduction

La dynamique des fluides (hydrodynamique) est la science qui s'intéresse au comportement des fluides en mouvement.

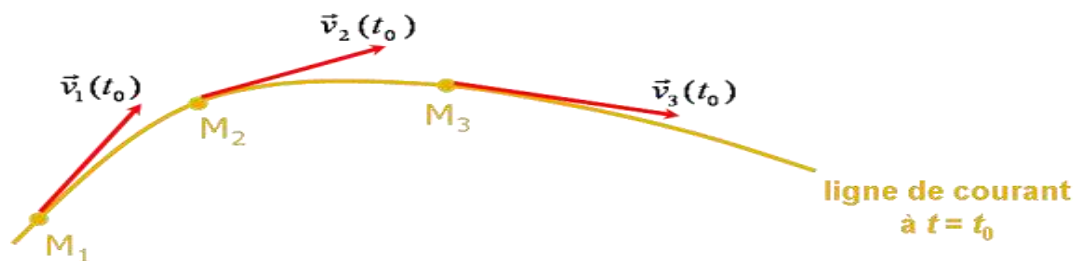
Dans ce chapitre, nous allons étudier les fluides en mouvement en négligeant les frottements, c'est à-dire en les considérant comme étant parfaits (une viscosité nulle) et incompressibles (masse volumique constante). On s'intéresse essentiellement aux équations fondamentales qui régissent la dynamique des fluides incompressibles parfaits qui sont :

- La relation de continuité (conservation de la masse).
- L'équation de Bernoulli (conservation de l'énergie).
- Le théorème d'Euler (conservation de la quantité de mouvement) à partir duquel on établit les équations donnant la force dynamique exercée par les fluides en mouvement (exemple les jets d'eau).

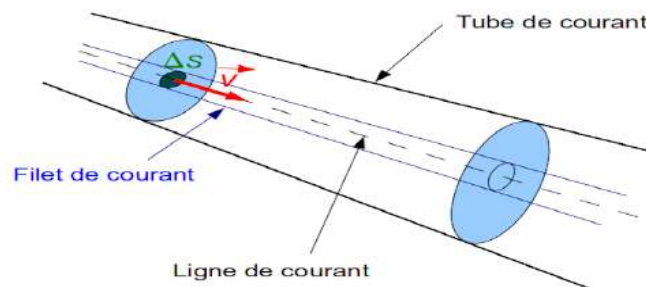
3.1. Écoulement permanent, ligne de courant, tube de courant

Un **écoulement** est dit **permanent** ou stationnaire, si les paramètres qui caractérisent le fluide (pression, vitesse, température, masse volumique) sont indépendants du temps en chacun des points de l'écoulement.

La **ligne de courant** (L.C.) est une courbe partout tangente aux vecteurs des vitesses des points de cette ligne. Pour un écoulement permanent, une ligne de courant est une courbe invariante dans le repère R, elle correspond aux trajectoires des particules qui la constituent.



On définit un **tube de courant** (T.C.) par l'ensemble des L.C. s'appuyant sur un contour fermé.



3.2. Equation de continuité

Considérons une veine d'un fluide incompressible de masse volumique ρ animée d'un écoulement permanent.

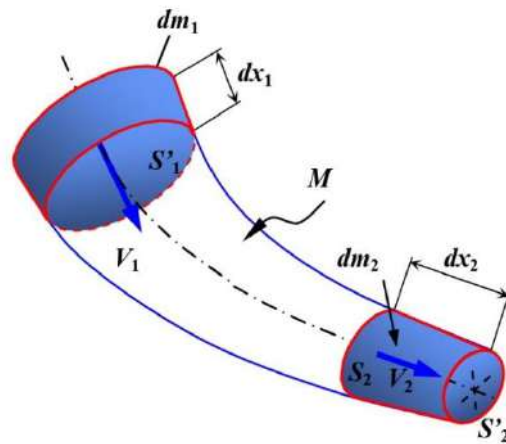


Fig. 3.1 : Représentation d'une veine de fluide en écoulement

On désigne par :

- S_1 et S_2 respectivement les sections d'entrée et de sortie du fluide à l'instant t ;
- S'_1 et S'_2 respectivement les sections d'entrée et de sortie du fluide à l'instant $t' = (t+dt)$;
- \vec{v}_1 et \vec{v}_2 les vecteurs vitesse d'écoulement respectivement à travers les sections S_1 et S_2 de la veine ;
- dx_1 et dx_2 respectivement les déplacements des sections S_1 et S_2 pendant l'intervalle de temps dt ;
- dm_1 : masse élémentaire entrante comprise entre les sections S_1 et S'_1 ;
- dm_2 : masse élémentaire sortante comprise entre les sections S_2 et S'_2 ;
- M : masse comprise entre S_1 et S_2 ;
- dV_1 : volume élémentaire entrant compris entre les sections S_1 et S'_1 ;
- dV_2 : volume élémentaire sortant compris entre les sections S_2 et S'_2 .

A l'instant t : le fluide compris entre S_1 et S_2 a une masse égale à $(dm_1 + M)$;

A l'instant $t+dt$: le fluide compris entre S'_1 et S'_2 a une masse égale à $(M + dm_2)$.

$$\text{Par conservation de la masse : } dm_1 + M = M + dm_2 \quad (3.1)$$

$$\text{En simplifiant par } M \text{ on aura : } dm_1 = dm_2 \quad (3.2)$$

$$\text{Donc : } \rho_1 \cdot dV_1 = \rho_2 \cdot dV_2 \quad (3.3)$$

$$\text{Ou encore : } \rho_1 \cdot S_1 \cdot dx_1 = \rho_2 \cdot S_2 \cdot dx_2 \quad (3.4)$$

$$\text{En divisant par « } dt \text{ » on aboutit à : } \rho_1 \cdot S_1 \cdot \frac{dx_1}{dt} = \rho_2 \cdot S_2 \cdot \frac{dx_2}{dt} \Leftrightarrow \rho_1 \cdot S_1 \cdot V_1 = \rho_2 \cdot S_2 \cdot V_2 \quad (3.5)$$

Puisque le fluide est incompressible : $\rho_1 = \rho_2 = \rho$ (3.6)

On peut simplifier et aboutir à l'équation de continuité suivante :

$$S_1 \cdot V_1 = S_2 \cdot V_2 \quad (3.7)$$

L'équation de continuité représente la loi de conservation de masse

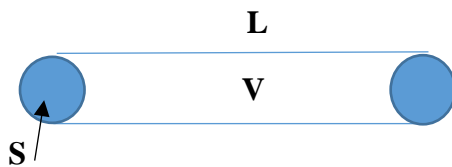
3.3. Notion de débit

Le débit est la quantité de fluide écoulee pendant le temps t . La quantité peut être définie par un volume ou une masse.

3.3.1. Débit volumique

C'est le rapport du volume de la veine par unité de temps :

$$Q_V = \frac{V}{t} = \frac{S \cdot L}{t} = S \cdot v \quad (3.8)$$



Q_V : Débit volumique (m^3/s)

S : Surface de la section de la veine du fluide (m^2)

V : Volume de la section de la veine (m^3)

L : Longueur de la section de la veine (m)

v : vitesse moyenne du fluide à travers la section S (m/s)

t : Temps de l'écoulement.

3.3.2. Débit massique

C'est le rapport de la masse de la veine par unité de temps :

$$Q_m = \frac{m}{t} = \frac{\rho \cdot V}{t} = \rho \cdot S \cdot v = \rho \cdot Q_V \quad (3.9)$$

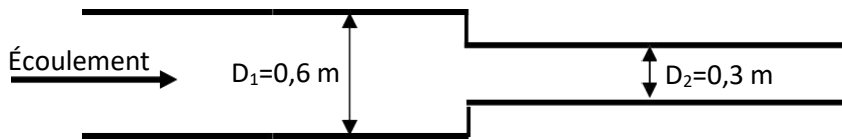
Q_m : Débit massique (kg/s)

Q_V : Débit volumique (m^3/s)

ρ : masse volumique (Kg/m^3)

3.3.3. Exemple

Dans un système de distribution d'eau potable, la vitesse maximale ne doit pas excéder 3m/s. si cette condition est respectée dans la première conduite de diamètre $D_1 = 0,6$ m, le sera-t-elle dans la seconde conduite de diamètre $D_2 = 0,3$ m.



$$\text{L'équation de continuité : } S_1.V_1 = S_2.V_2 \rightarrow \frac{V_1}{V_2} = \left(\frac{D_2}{D_1}\right)^2 = \frac{1}{4} \rightarrow V_2 = 4.V_1 = 12 \text{ m/s}$$

Cette vitesse est supérieure à la limite permise.

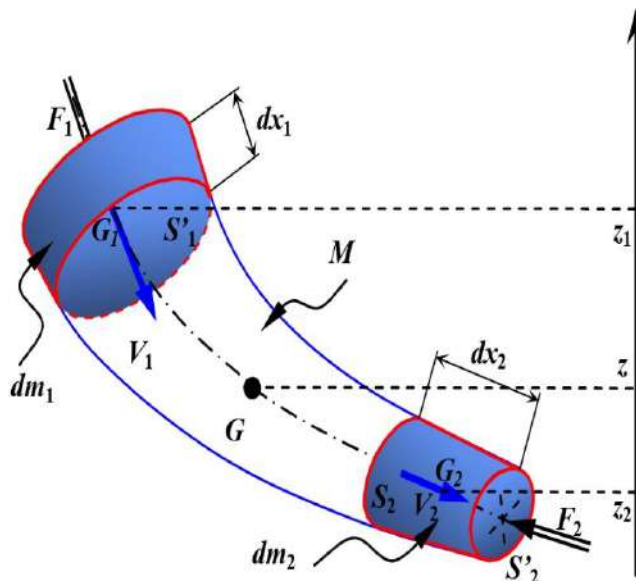
3.4. Théorème de Bernoulli – Cas d'un Ecoulement sans Echange de Travail

Reprenons le schéma de la figure 3.1 avec les mêmes notations et les hypothèses suivantes :

- Le fluide est parfait et incompressible ;
- L'écoulement est permanent ;
- L'écoulement est dans une conduite parfaitement lisse.

Considérons un axe \vec{z} vertical dirigé vers le haut et z_1 , z_2 et z_3 respectivement les altitudes des centres de gravité des masses dm_1 , dm_2 et M .

Désignons par F_1 et F_2 les normes des forces de pression du fluide agissant au niveau des sections S_1 et S_2 .



Daniel Bernoulli : 1700-1782

Fig. 3.2 : Application du théorème de Bernoulli entre les sections d'une veine de fluide en écoulement

- A l'instant t le fluide de masse (dm_1+M) est compris entre S_1 et S_2 , son énergie mécanique :

$$E_{méc} = E_{pot} + E_{cin} = (dm_1 \cdot g \cdot z_1 + M \cdot g \cdot z) + \frac{1}{2} dm_1 \cdot v_1^2 + \int_{S_1}^{S_2} \frac{dm \cdot v^2}{2} \quad (3.10)$$

- A l'instant $t'=(t+dt)$ le fluide de masse ($M+dm_2$) est compris entre S'_1 et S'_2 . Son énergie mécanique est :

$$E'_{méc} = E'_{pot} + E'_{cin} = (M \cdot g \cdot z + dm_2 \cdot g \cdot z_2) + \int_{S_1}^{S_2} \frac{dm \cdot v^2}{2} + \frac{1}{2} dm_2 \cdot v_2^2 \quad (3.11)$$

On applique le théorème de l'énergie mécanique au fluide entre t et t': "La variation de l'énergie mécanique est égale à la somme des travaux des forces extérieures."

$$E'_{méc} - E_{méc} = W_{mForces\ de\ pression} = F_1 \cdot dx_1 - F_2 \cdot dx_2 \quad (3.12)$$

$$E'_{méc} - E_{méc} = P_1 \cdot S_1 \cdot dx_1 - P_2 \cdot S_2 \cdot dx_2 = P_1 \cdot dV_1 - P_2 \cdot dV_2 \quad (3.13)$$

En simplifiant on obtient :

$$dm_2 \cdot g \cdot z_2 + \frac{1}{2} dm_2 \cdot v_2^2 - dm_1 \cdot g \cdot z_1 + \frac{1}{2} dm_1 \cdot v_1^2 = \frac{P_1}{\rho_1} dm_1 - \frac{P_2}{\rho_2} dm_2 \quad (3.14)$$

Par conservation de la masse : $dm_1 = dm_2 = dm$ et puisque le fluide est incompressible : $\rho_1 = \rho_2 = \rho$, on aboutit à l'équation de Bernoulli :

$$\frac{v_2^2 - v_1^2}{2} + \frac{P_2 - P_1}{\rho} + g(z_2 - z_1) = 0 \quad (3.15)$$

L'unité de chaque terme de la relation (3.15) est le joule par kilogramme (J/kg) qui peut s'écrire ainsi :

$$\frac{v_2^2}{2} + \frac{P_2}{\rho} + g \cdot z_2 = \frac{v_1^2}{2} + \frac{P_1}{\rho} + g \cdot z_1 \quad (3.16)$$

C'est l'équation de Bernoulli dans le cas d'un écoulement sans échange de travail.

➤ Le théorème de Bernoulli est une équation exprimant la conservation de l'énergie mécanique du fluide au cours de son mouvement.

Application

On considère un siphon de diamètre $d=10$ mm alimenté par un réservoir d'essence de grandes dimensions par rapport à d et ouvert à l'atmosphère. On suppose que :

Le fluide est parfait.

Le niveau du fluide dans le réservoir varie lentement.

L'accélération de la pesanteur $g = 9,81 \text{ m} \cdot \text{s}^{-2}$

Le poids volumique de l'essence : $\varpi = 6896 \text{ N} / \text{m}^3$

$$H = Z_A - Z_S = 2,5 \text{ m}$$

1. En appliquant le Théorème de Bernoulli entre les points A et S, calculer la vitesse d'écoulement V_S dans le siphon.
2. En déduire le débit volumique Q_v

Solution

1. Equation de Bernoulli pour un fluide parfait sans échange de travail

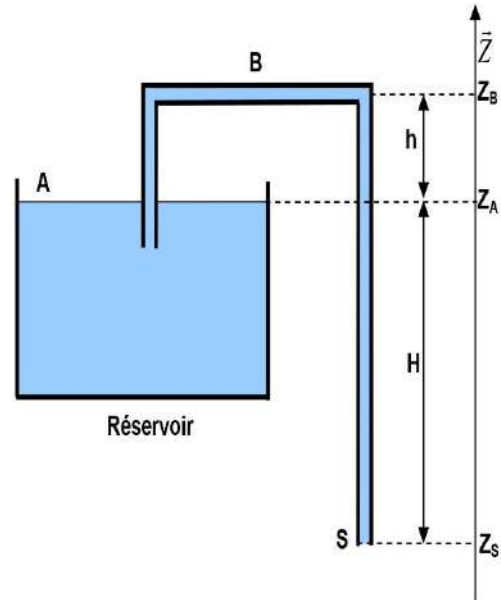
$$\frac{v_S^2}{2} + \frac{P_S}{\rho} + g \cdot Z_S = \frac{v_A^2}{2} + \frac{P_A}{\rho} + g \cdot Z_A$$

$$\frac{v_S^2}{2g} + \frac{P_S}{\omega} + Z_S = \frac{v_A^2}{2g} + \frac{P_A}{\omega} + Z_A$$

$$v_S = \sqrt{2gH} = 7 \text{ m/s}$$

2. Le débit volumique q_v

$$Q_V = \frac{V}{t} = \frac{S \cdot L}{t} = S \cdot v_S = \frac{\pi d^2 v_S}{4} = 0,55 \text{ L/s}$$



3.5. Théorème de Bernoulli – Cas d'un Ecoulement avec Echange de Travail

Reprenons le schéma de la veine fluide avec les mêmes notations et les mêmes hypothèses. On suppose en plus qu'une machine hydraulique (pompe) est placée entre les sections S_1 et S_2 . Cette pompe est caractérisée par une puissance nette P_{net} échangée avec le fluide, une puissance absorbée P_a et un certain rendement η .

3.5.1. Cas d'une pompe

Le rendement est donné par l'expression suivante : $\eta = \frac{P_{net}}{P_a}$ (3.17)

3.5.2. Cas d'une turbine

Le rendement est donné par l'expression suivante : $\eta = \frac{P_a}{P_{net}}$ (3.18)

Entre les instants t et $t' = (t+dt)$, le fluide a échangé un travail net $W_{net} = P_{net} \cdot dt$ avec la machine hydraulique. W_{net} est supposé positif s'il s'agit d'une pompe et négatif s'il s'agit d'une turbine.

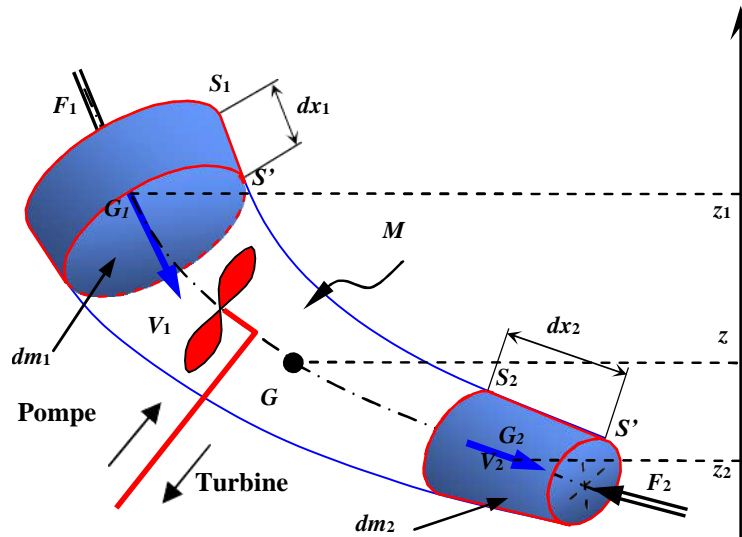


Fig.3.3 : Machine hydraulique entre les sections d'une veine de fluide

Désignons F_1 et F_2 respectivement les normes des forces de pression du fluide agissant au niveau des sections S_1 et S_2 .

- A l'instant t le fluide de masse (dm_1+M) est compris entre S_1 et S_2 .

Son énergie mécanique est :

$$E_{méc} = E_{pot} + E_{cin} = (dm_1 \cdot g \cdot z_1 + M \cdot g \cdot z) + \frac{1}{2} dm_1 \cdot v_1^2 + \int_{S_1}^{S_2} \frac{dm \cdot v^2}{2} \quad (3.19)$$

- A l'instant $t'=(t+dt)$ le fluide de masse $(M+dm_2)$ est compris entre S'_1 et S'_2 . Son énergie mécanique est :

$$E'_{méc} = E'_{pot} + E'_{cin} = (M \cdot g \cdot z + dm_2 \cdot g \cdot z_2) + \int_{S_1}^{S_2} \frac{dm \cdot v^2}{2} + \frac{1}{2} dm_2 \cdot v_2^2 \quad (3.20)$$

Appliquons le théorème de l'énergie mécanique au fluide entre t et t' : «La variation de l'énergie mécanique est égale à la somme des travaux des forces extérieures.», en considérant cette fois ci le travail de la machine hydraulique.

$$E'_{méc} - E_{méc} = F_1 \cdot dx_1 - F_2 \cdot dx_2 + P_{net} \cdot dt \quad (3.21)$$

$$E'_{méc} - E_{méc} = P_1 \cdot S_1 \cdot dx_1 - P_2 \cdot S_2 \cdot dx_2 + P_{net} \cdot dt = P_1 \cdot dV_1 - P_2 \cdot dV_2 + P_{net} \cdot dt \quad (3.22)$$

Après simplification, on aura :

$$dm_2 \cdot g \cdot z_2 + \frac{1}{2} dm_2 \cdot v_2^2 - dm_1 \cdot g \cdot z_1 + \frac{1}{2} dm_1 \cdot v_1^2 = \frac{P_1}{\rho_1} dm_1 - \frac{P_2}{\rho_2} dm_2 - P_{net} \cdot dt \quad (3.23)$$

Par conservation de la masse : $dm_1 = dm_2 = dm$ et puisque le fluide est incompressible :

$\rho_1 = \rho_2 = \rho$, on aboutit à l'équation de Bernoulli :

$$\frac{v_2^2 - v_1^2}{2} + \frac{P_2 - P_1}{\rho} + g(z_2 - z_1) = \frac{P_{net}}{q_m} \quad (3.24)$$

C'est l'équation de Bernoulli dans le cas d'un écoulement avec échange de travail.

Application

Une pompe P alimente un château d'eau à partir d'un puit à travers une conduite de diamètre $d = 150$ mm.

On donne :

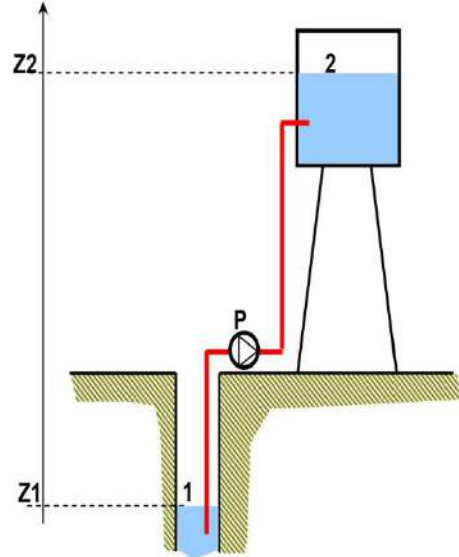
Les altitudes $Z_2 = 26$ m, $Z_1 = -5$ m,

Les pressions $P_1 = P_2 = 1,013$ bar ;

La vitesse d'écoulement $V = 0,4$ m/s,

L'accélération de la pesanteur $g = 9,81$ m/s².

1. Calculer le débit volumique Q_v de la pompe en L/s.
2. Ecrire l'équation de Bernoulli entre les surfaces 1 et 2.
3. Calculer la puissance utile P_u de la pompe.
4. En déduire la puissance P_a absorbée par la pompe sachant que son rendement est de 80%.



Solution

1. Calcul du débit volumique Q_v de la pompe en l/s

$$Q_V = V \frac{\pi d^2}{4} = 0,4 \frac{\pi \cdot 0,15^2}{4} = 7 \cdot 10^{-3} \text{ m}^3/\text{s} = 7 \text{ L/s}$$

2. Equation de Bernoulli pour un fluide parfait incompressible (avec échange de travail)

$$\frac{v_2^2 - v_1^2}{2} + \frac{P_2 - P_1}{\rho} + g(z_2 - z_1) = \frac{P_{net}}{q_m}$$

3. Puissance utile de la pompe :

$$P_u = q_v \cdot \rho \cdot g (H_1 + H_2) = 7 \cdot 10^{-3} \cdot 1000 \cdot 9,81 \cdot (26 + 5) = 2128,77 \text{ Watts}$$

4. Puissance absorbée par la pompe :

$$P_a = \frac{P_u}{\eta} = \frac{2128,77}{0,8} = 2661 \text{ Watts}$$

3.6. Applications du théorème de Bernoulli

3.6.1. Vidange d'un réservoir (théorème de Torricelli)

Une des applications les plus simples du théorème de Bernoulli est celle conduisant à la vitesse de vidange d'un réservoir à surface libre par un orifice de section très petite devant celle du réservoir.

Appliquons l'équation de Bernoulli entre 1 et 2 :

$$\frac{v_2^2}{2} + \frac{P_2}{\rho} + g \cdot Z_2 = \frac{v_1^2}{2} + \frac{P_1}{\rho} + g \cdot Z_1$$

On a :

$$P_1 = P_2 = P_{\text{atm}} \text{ et } Z_1 - Z_2 = h$$

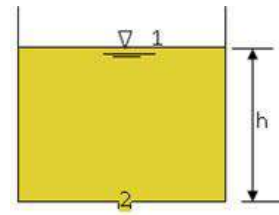


Figure 3.4 : Vidange d'un réservoir

Le réservoir étant grand, la vitesse de descente du niveau de la surface libre peut être considérée comme négligeable devant celle du fluide s'écoulant dans le jet : $v_1 \ll v_2$

D'où la formule de Torricelli reliant la vitesse de sortie à la hauteur h de liquide au-dessus de l'orifice :

$$v_2 = \sqrt{2gh} \quad (3.25)$$

3.6.2. Tube de Venturi

Le tube de Venturi a pour but de mesurer le débit à partir de la détermination de la différence de pression. Ce dispositif consiste à faire passer un écoulement par une contraction pour obtenir une diminution de pression.

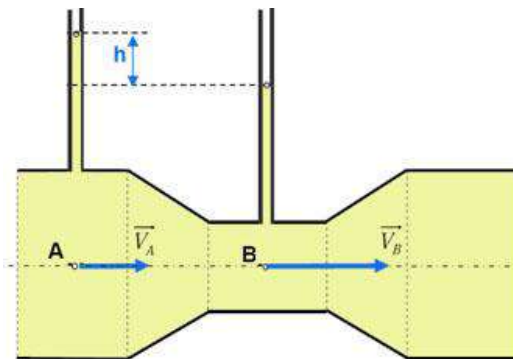


Fig. 3.5 : Tube de Venturi

L'équation de Bernoulli entre A et B est :

$$\frac{P_A}{\rho g} + \frac{v_A^2}{2} + Z_A = \frac{P_B}{\rho g} + \frac{v_B^2}{2} + Z_B$$

On a :

$$Z_A = Z_B \text{ (même niveau)}$$

$$v_A S_A = v_B S_B \text{ (équation de continuité)}$$

$$\text{L'équation hydrostatique entre A et B : } P_A - P_B = \rho g h$$

En combinant ces équations, on obtient une équation de la vitesse à la section d'étranglement :

$$v_B = \sqrt{\frac{2g.h}{1 - \left(\frac{S_B}{S_A}\right)^2}} \quad (3.26)$$

$$D'où \text{ le débit : } Q = V_B \cdot S_B \quad (3.27)$$

Ce débit est considéré comme un débit théorique, car le fluide est supposé parfait. Le débit réel est obtenu en multipliant le débit théorique par un coefficient correcteur qui prend en considération la perte d'énergie dans le Venturi, ce coefficient est appelé coefficient de débit C_d .

$$Q = C_d \cdot V_B \cdot S_B \quad (3.28)$$

3.6.3. Tube de Pitot

Un tube de Pitot, souvent simplement appelé 'Pitot' est l'appareil le plus couramment utilisé pour faire des mesures de vitesse dans divers écoulements. L'appareil est nommé en l'honneur de son inventeur, Henri de Pitot qui testa l'appareil dans la Seine pour la première fois en août 1732.

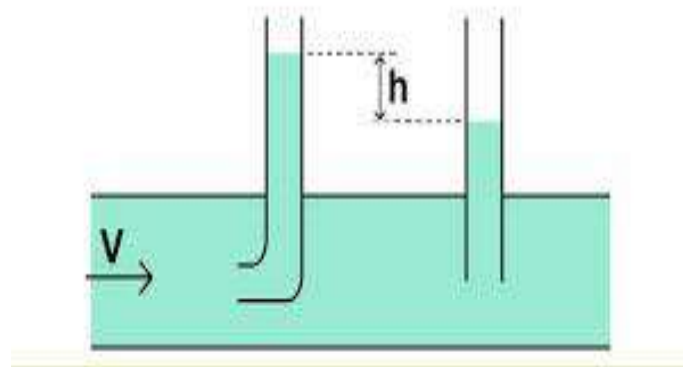


Fig.3.6 : Tube de Pitot

Le principe est basé sur la mesure de la pression statique et de la pression dynamique en un point d'un écoulement.

L'équation de Bernoulli entre 1 et 2 s'écrit :

$$\frac{P_1}{\rho g} + \frac{v_1^2}{2} + Z_1 = \frac{P_2}{\rho g} + \frac{v_2^2}{2} + Z_2$$

On a :

$$Z_1 = Z_2 \text{ (même niveau)}$$

$$V_2 = 0 \text{ (point 2 est un point d'arrêt c-à-d est un obstacle)}$$

$$\text{L'équation hydrostatique donne : } P_1 - P_2 = \rho g h$$

D'où l'expression de la vitesse du fluide dans la canalisation appelé relation de Torricelli :

$$V_1 = \sqrt{2gh} \quad (3.28)$$

3.7. Théorème d'Euler

La connaissance des forces exercées par les fluides en mouvement est d'une importance considérable dans l'analyse et la conception d'objets tel que les pompes, les turbines, les avions ...etc. L'équation d'énergie n'est pas suffisante pour résoudre la plupart de ces problèmes. Le théorème d'Euler résulte de l'application du théorème de quantité de mouvement à l'écoulement d'un fluide :

$$\sum F_{ext} = \frac{d(dm)V}{dt} = dm \frac{dV}{dt} \quad (3.29)$$

Où dm est la masse du fluide contenu dans l'enveloppe limitée par S_1 et S_2 .

On sait que le débit massique égale à : $Q_m = \frac{dm}{dt}$

Donc, le théorème d'Euler s'écrit :

$$\sum F_{ex} = Q_m d\vec{V} = Q_m (\vec{V}_2 - \vec{V}_1) = \rho \cdot Q \cdot (\vec{V}_2 - \vec{V}_1) \quad (3.30)$$

Où :

$\vec{V}_1 \rightarrow$ est la vitesse du fluide qui entre par S_1

$\vec{V}_2 \rightarrow$ est la vitesse du fluide qui sort par S_2

La résultante ($\sum F_{ext}$) des actions mécaniques extérieures exercées sur un fluide isolé (contenu dans l'enveloppe limitée par S_1 et S_2) est égale à la variation de la quantité du mouvement qui entre en S_1 à une vitesse V_1 et sort par S_2 à une vitesse V_2 :

$$\sum F_{ex} = \rho \cdot Q (\vec{V}_2 - \vec{V}_1)$$

Application

Considérons un obstacle symétrique par rapport à l'axe \vec{z} . Le jet d'un écoulement de débit massique q_m de vitesse \vec{V}_1 et de direction parallèle à l'axe \vec{z} , percute l'obstacle qui le dévie d'un angle β . Le fluide quitte l'obstacle à une vitesse \vec{V}_2 de direction faisant un angle β par rapport à l'axe \vec{z} .

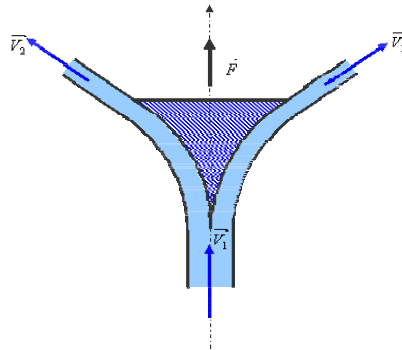


Fig. 3.7 : Jet d'eau dévié et divisé par un obstacle

La quantité de mouvement du fluide à l'entrée de l'obstacle est : $q_m \cdot V_1$ porté par l'axe \vec{z} .

La quantité de mouvement du fluide à la sortie de l'obstacle est : $q_m \cdot V_2 \cos \beta$ porté par l'axe \vec{z} . La force opposée au jet étant égale à la variation de la quantité de mouvement :

$$R = q_m \cdot V_2 \cos \beta - q_m \cdot V_1 \quad (3.31)$$

La force F exercée sur l'obstacle en direction de \vec{z} est égale et opposée à celle-ci :

$$F = q_m \cdot (V_1 - V_2 \cdot \cos \beta) \quad (3.32)$$

Chapitre 4 : Dynamique des fluides réels incompressibles

Prérequis

- Généralité sur les fluides.
- Dynamique des fluides parfaits incompressibles.

Objectifs pédagogiques du chapitre 4

Au terme de ce chapitre, l'étudiant doit être capable

- De distinguer les différents régimes d'écoulement d'un fluide.
- D'appliquer le théorème de Bernoulli pour un écoulement permanent d'un fluide réel incompressible avec ou sans échange d'énergie.
- De déterminer les pertes de charge et les puissances mises en jeu.

Sommaire du chapitre 4

Introduction

4.1. Régimes d'écoulement - nombre de Reynolds

4.2. Notion de perte de charges

4.3. Théorème de Bernoulli appliqué à un fluide réel avec échange de travail

Introduction

Dans le chapitre 3, pour appliquer l'équation de Bernoulli, nous avons supposé un fluide parfait. L'écoulement d'un fluide réel est plus complexe que celui d'un fluide idéal. En effet, il existe des forces de frottement, dues à la viscosité du fluide, qui s'exercent entre les particules du fluide et les parois, ainsi qu'entre les particules elles-mêmes. Pour résoudre un problème d'écoulement d'un fluide réel, on fait appel à une méthode simplifiée de calcul des pertes de charges basées sur des résultats expérimentaux initiés par le physicien britannique Osborne Reynolds.

4.1. Régimes d'écoulement - nombre de Reynolds

Depuis longtemps les hydrauliciens avaient constaté qu'il existe différents régimes d'écoulement, mais Osborne Reynolds les a étudiés expérimentalement, et a dégagé les critères permettant de les différencier.

4.1.1. Expérience d'Osborne Reynolds

Un réservoir alimente une conduite horizontale en verre munie de deux prises de pression. Une vanne permet de régler la vitesse d'écoulement. Un tube effilé muni d'un réservoir de colorant permet de visualiser l'écoulement.

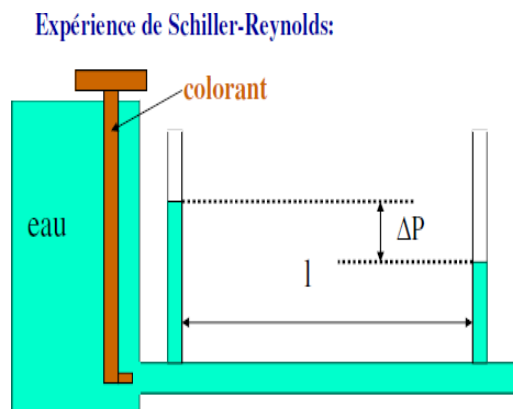


Fig.4.1 : Expérience de Reynolds

- Aux faibles vitesses, le filet coloré conserve son individualité jusqu'à l'extrémité. Il s'écoule en couches cylindriques coaxiales. La perte de pression Δp est faible, On dit que le fluide s'écoule en **régime laminaire**.
- A partir d'une certaine vitesse de l'écoulement, le filet coloré se mélange brusquement dans l'eau après avoir parcouru une distance. C'est une transition entre le régime laminaire et celui turbulent. On dit que le fluide s'écoule en **régime transitoire**.

- Si on augmente encore la vitesse, le filet coloré se mélange à l'écoulement presque aussitôt après son introduction. On constate une augmentation brutale de Δp . Il y a une formation d'un mouvement tourbillonnaire dans le fluide. On dit que le fluide s'écoule en **régime turbulent**.

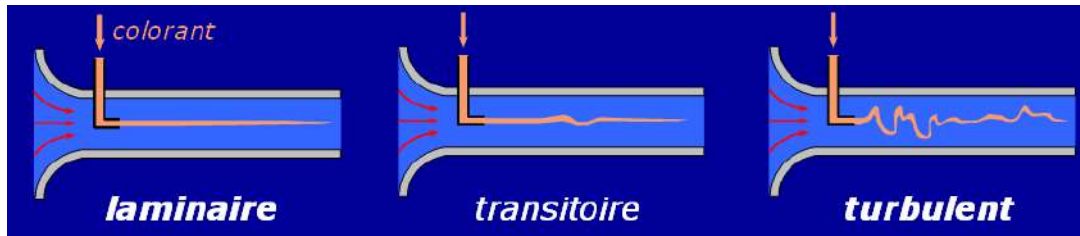


Fig.4.2 : Régimes d'écoulement

En utilisant divers fluides à viscosités différentes, en faisant varier le débit et le diamètre de la canalisation, Reynolds (1883) a montré que le paramètre qui permettait de déterminer si le régime de l'écoulement est laminaire ou turbulent est un nombre sans dimension appelé **nombre de Reynolds** donné par l'expression suivante :

$$Re = \frac{\rho \cdot V \cdot D}{\mu} = \frac{V \cdot D}{\nu} \quad (4.1)$$

D : diamètre de la conduite (en m)

V : vitesse moyenne d'écoulement (en m/s)

ρ : masse volumique du fluide (en kg/m^3)

μ : coefficient de viscosité dynamique (en Pa.s)

ν : coefficient de viscosité cinématique (en m^2/s)

Résultats empiriques à titre indicatif

Si $Re < 2000$, le régime est laminaire ;

Si $2000 < Re < 3000$, le régime est transitoire ;

Si $3000 < Re < 100000$, le régime est turbulent lisse ;

Si $Re > 100000$, le régime est turbulent rugueux.

Remarque

Si la section n'est pas circulaire, on définit le diamètre équivalent (D_e) par :

$$De = \frac{4 \cdot \text{Section de la conduite}}{\text{Périmètre mouillé par le fluide}} \quad (4.2)$$

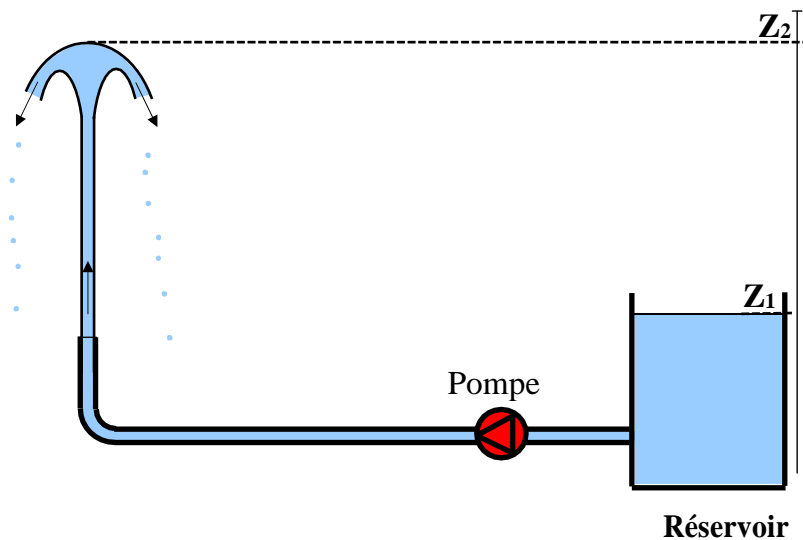
4.1.2. Application

On alimente un jet d'eau à partir d'un réservoir au moyen d'une pompe de débit volumique $q_v = 2 \text{ L/s}$ et d'un tuyau de longueur $L = 15 \text{ m}$ et de diamètre $d = 30 \text{ mm}$. Le tuyau comporte un coude à 90° ayant un coefficient de pertes de charge $K_s = 0,3$.

Le niveau de la surface libre du réservoir, supposé lentement variable, est à une altitude $Z_1 = 3 \text{ m}$ au-dessus du sol.

Le jet s'élève jusqu'à une hauteur $Z_2 = 10 \text{ m}$. On suppose que :

- Les pressions : $P_1 = P_2 = P_{\text{atm}}$.
- La viscosité dynamique de l'eau : $\mu = 10^{-3} \text{ Pa.s}$.
- La masse volumique de l'eau : $\rho = 1000 \text{ kg/m}^3$.
- L'accélération de la pesanteur : $g = 9,81 \text{ m/s}^2$.



Travail demandé :

1. Calculer la vitesse V d'écoulement d'eau dans la conduite en m/s.
2. Calculer le nombre de Reynolds Re .
3. Préciser la nature de l'écoulement.

Solution

1. La vitesse V d'écoulement d'eau dans la conduite en m/s.

$$v = \frac{4q_v}{\pi d^2} = \frac{4 \cdot 2 \cdot 10^{-3}}{\pi \cdot 0,03^2} = 2,83 \text{ m/s}$$

2. Le nombre de Reynolds Re

$$Re = \frac{V.D}{\left(\frac{\mu}{\rho}\right)} = \frac{2,83.0,03}{\left(\frac{10^{-3}}{10^3}\right)} = 84900$$

3. La nature de l'écoulement

$2000 < Re < 10^5$: il s'agit d'un écoulement turbulent lisse.

4.2. Notion de perte de charges

Nous pourrions aisément constater que la pression d'un liquide réel diminue tout au long d'une canalisation dans laquelle il s'écoule, cela est dû à l'état de la surface de cette canalisation et à la géométrie du circuit hydraulique.

En d'autres termes ce fluide réel, en mouvement, subit des pertes d'énergie dues aux frottements sur les parois de la canalisation (**pertes de charge linéaires**) ou sur les "accidents" de parcours (**pertes de charge singulières**).

4.2.1. Notion de rugosité des conduites

Contrairement à une surface lisse, une surface rugueuse implique un état de surface dont les irrégularités ont une action directe sur les forces de frottements.

Une surface rugueuse peut être considérée comme étant constituée par une série de protubérances élémentaires caractérisées par une hauteur, notée k , et appelée « **rugosité** ».

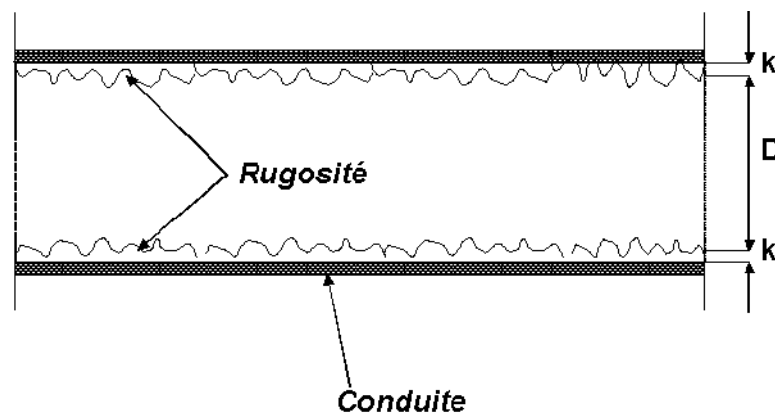


Fig.4.3 : la rugosité d'une conduite

Afin de comparer la rugosité par rapport au diamètre de la conduite, on introduit le rapport :

$$\varepsilon = \frac{k}{D} \quad (4.3)$$

4.2.2. Perte de charges linéaires

Soit une conduite cylindrique horizontale de diamètre invariable D , dans laquelle s'écoule un fluide à une vitesse V . Supposons que l'on dispose sur cette conduite en deux endroits éloignés d'une longueur L , deux tubes manométriques permettant de mesurer la pression statique.

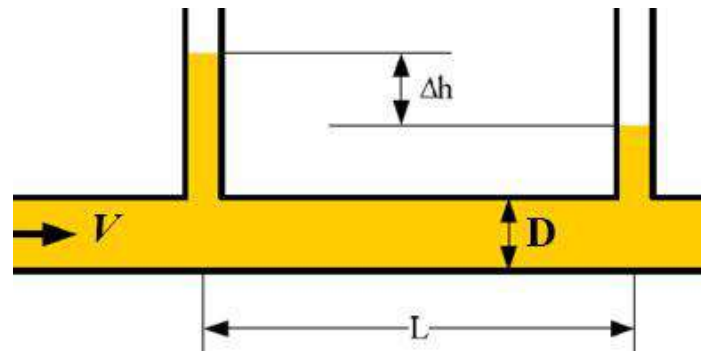


Fig. 4.4 : La chute de pression par l'effet du frottement

On constate que la hauteur du fluide est plus grande dans le tube amont que dans le tube aval. La différence des deux niveaux donne la hauteur de fluide correspondant à la perte de charge Δh . Les pertes de charge linéaires sont proportionnelles à la longueur L de la conduite, inversement proportionnelles à son diamètre D , proportionnelle au carré de la vitesse débitante V du fluide. Elle est calculée par la formule de *Darcy – Weisbach* :

$$\Delta h_L = \lambda \frac{L \cdot V^2}{2gD} \quad (\text{différence de hauteur}) \quad (4.4)$$

Ou encore :

$$\Delta p_s = \lambda \frac{\rho \cdot L \cdot V^2}{2D} \quad (\text{différence de pression}) \quad (4.5)$$

Le coefficient de perte de charge λ ou coefficient de frottement est un coefficient sans dimension. Le calcul des pertes de charge repose entièrement sur la détermination de ce coefficient λ en utilisant des formules empiriques qui sont applicables que dans certaines conditions.

4.2.2.1. Perte de charge dans le cas d'un écoulement laminaire : $Re < 2000$

Dans ce cas, on peut montrer que le coefficient λ est uniquement fonction du nombre de Reynolds Re ; l'état de la surface n'intervient pas et donc λ ne dépend pas de ε (rugosité de

la conduite), ni de la nature de la tuyauterie. Le coefficient λ est déterminé par la relation de

$$\text{Poiseuille : } \lambda = \frac{64}{Re} \quad (4.6)$$

On peut réécrire Δh_L de la manière suivante :

$$\Delta h_L = \frac{32.L.V^2}{g.D.Re} = \frac{32.\mu.L.V}{\rho.g.D^2} \quad (4.7)$$

Il est clair que Δh_L est proportionnel à la vitesse V , donc au débit Q , ainsi qu'à la viscosité cinématique ν .

Exemple 1

Une huile de densité 0,850 et de viscosité dynamique 0,10104 Pa.s circule dans un tuyau de fonte lisse de longueur $L = 3000$ m, de diamètre $D = 30$ cm, avec un débit $Q = 44$ L/s. Quelle est la perte de charge dans ce tuyau ?

Solution

$$\text{La vitesse moyenne est donnée par : } V = \frac{Q}{S} = 4. \frac{0,044}{3,14.0,3^2} = 0,622 \text{ m/s}$$

$$\text{Le nombre de Reynolds est donnée par : } Re = \frac{\rho.V.D}{\mu} = \frac{850.0,622.0,3}{0,10104} = 1570 < 2000$$

$$\text{L'écoulement est laminaire : } \lambda = \frac{64}{Re} = \frac{64}{1570} = 0,0407$$

$$\text{La perte de charge linéaire vaut : } \Delta h_L = \lambda \frac{L.V^2}{2gD} = 0,0407. \frac{3000.0,622^2}{0,3.2.9,81} = 6,8 \text{ m}$$

4.2.2.2. Perte de charge dans le cas d'un écoulement turbulent

Différentes lois sont proposées à partir d'études expérimentales :

- Pour $3000 < Re < 10^5$ l'écoulement est dit turbulent lisse, λ ne dépend que de Re . La loi la plus utilisée est celle de *Blasius* :

$$\lambda = 0,316.(Re)^{-0,25} = (100R)^{-0,25} \quad (4.8)$$

- Pour $Re > 10^5$ l'écoulement est dit turbulent rugueux, λ ne dépend que de ε/d . On peut utiliser la loi de *Blench* :

$$\lambda = 0,79 \sqrt{\frac{\varepsilon}{d}} \quad (4.9)$$

4.2.2.3. Perte de charge dans le cas d'un écoulement transitoire

Pour $2000 < Re < 3000$, c'est le régime transitoire entre le laminaire et le turbulent. λ dépend de ε/d et de Re comme le montre la formule de *Churchill* :

$$\frac{1}{\sqrt{\frac{\lambda}{2}}} = 2,457 \cdot \ln \left[\left(\frac{7}{Re} \right)^{0,9} + 0,27 \frac{\varepsilon}{D} \right] \quad (4.10)$$

4.2.3. Pertes de charge singulières

Chaque fois que le régime d'un fluide se trouve perturbé brusquement, c'est à dire que la vitesse varie rapidement en direction ou en grandeur, les tourbillons produits donnent lieu à un frottement supplémentaire qui s'ajoute aux frottements dus à la viscosité et aux parois du tube. Ces perturbations engendrent des pertes de charge appelée perte de charge singulière. Les principales pertes de charge singulières se produisent à l'entrée de la conduite, dans les rétrécissements ou élargissements de section, dans les coudes et les branchements, ainsi que dans les organes divers disposés sur la tuyauterie (vannes, filtres, clapets...). Pour exprimer ces pertes de charge, on utilise la formule suivante :

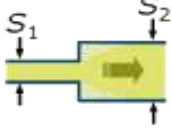
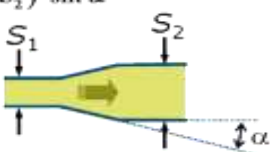
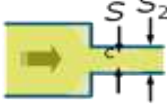
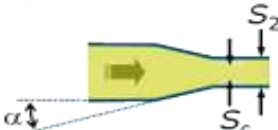
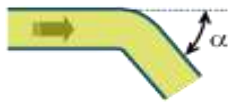
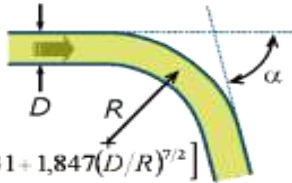
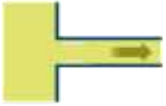

$$\Delta h_s = K_s \frac{V^2}{2g} \quad (\text{différence de hauteur}) \quad (4.11)$$

Ou encore :

$$\Delta p_s = K_s \frac{\rho \cdot V^2}{2} \quad (\text{différence de pression}) \quad (4.12)$$

K_s est le coefficient de perte de charge singulière, il est fonction de la singularité géométrique et du nombre de Reynolds. La détermination de ce coefficient est principalement du domaine de l'expérience. K_s est donné pour différentes configurations pratiques dans le tableau 4.1 :

Tableau 4.1. Quelques singularités typiques avec les coefficients de perte de charge associés

<p>Elargissement brusque $K = (1 - S_1/S_2)^2$</p> 	<p>Divergent $K = (1 - S_1/S_2)^2 \sin \alpha$</p> 
<p>Rétrécissement brusque $K = (1/\mu - 1)^2$ $\mu = S_c/S_2$</p> 	<p>Convergent $K = (1/\mu - 1)^2 \sin \alpha$ $\mu = S_c/S_2$</p> 
<p>Coude brusque $K = \sin^2 \alpha + 2 \sin^4 \frac{\alpha}{2}$</p> 	<p>Coude arrondi</p>  <p>$K = \frac{\alpha}{\pi} [0,131 + 1,847(D/R)^{7/2}]$</p>
<p>Entrée de canalisation brusque $K = 0,5$</p> 	<p>Entrée de canalisation progressive $K = 0,04$</p> 

Remarque : Pour réduire les pertes de charges singulières, on doit éviter les angles vifs et les changements brusques des sections.

La perte de charge totale entre deux points d'un circuit est :

$$\Delta h = \Delta h_L + \Delta h_S \quad (4.13)$$

4.3. Théorème de Bernoulli appliqué à un fluide réel avec échange de travail

Il est assez fréquent, dans les circuits hydrauliques, qu'un appareil hydromécanique, placé dans un tuyau, permette une transformation d'énergie mécanique en énergie hydraulique (une pompe par exemple) ou inversement (une turbine). Ainsi l'expression de l'équation de Bernoulli s'écrit :

$$\frac{v_2^2 - v_1^2}{2} + \frac{P_2 - P_1}{\rho} + g(z_2 - z_1) = \Delta h_{I2} + \frac{P_{net}}{q_m} \quad (4.14)$$

L'unité de chaque terme de la relation (4.14) est le joule par kilogramme (J/kg).

C'est l'équation de Bernoulli appliqué à un fluide réel avec échange de travail avec :

$$\Delta h_{12} = \Delta h_L + \Delta h_S$$

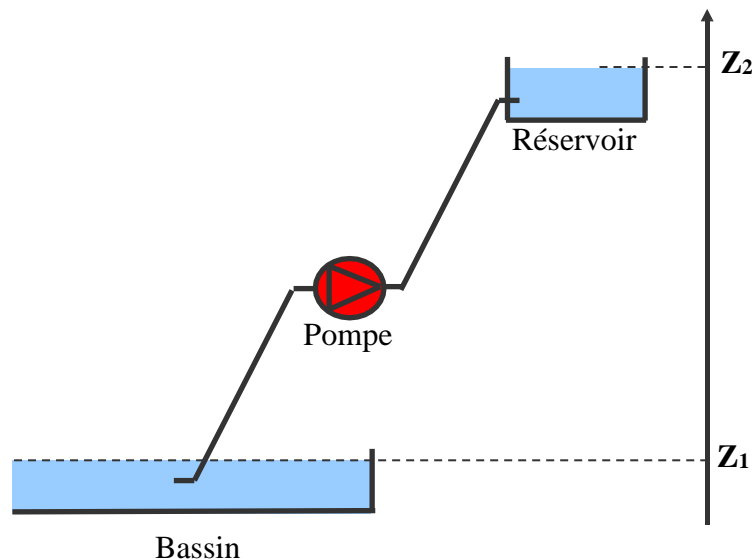
Remarque :

1. Cas d'une pompe : Le rendement est donné par l'expression suivante : $\eta = \frac{P_{net}}{P_a}$ (4.15)

2. Cas d'une turbine : Le rendement est donné par l'expression suivante : $\eta = \frac{P_a}{P_{net}}$ (4.16)

Application

Une pompe de débit volumique $q_v = 2,8 \text{ L/s}$ remonte de l'eau entre un bassin et un réservoir à travers une conduite de diamètre $d = 135 \text{ mm}$.



On donne :

- $Z_1 = 0$; $Z_2 = 35 \text{ m}$
- $P_1 = P_2 = 1013 \text{ mbar}$
- viscosité dynamique de l'eau : $\mu = 1.10^{-3} \text{ Pa}\cdot\text{s}$.
- longueur de la conduite $L = 65 \text{ m}$

On négligera toutes les pertes de charge singulières.

1. Calculer la vitesse d'écoulement V de l'eau dans la conduite.
2. Calculer le nombre de Reynolds. L'écoulement est laminaire ou turbulent ?
3. Calculer le coefficient de pertes de charge linéaire. En déduire les pertes de charges J_{12} tout au long de la conduite.
4. Appliquer le théorème de Bernoulli pour calculer la puissance nette P_{net} de la pompe.
5. Le rendement de la pompe étant de 80 %, calculer la puissance absorbée par la pompe.

Solution

$$1. V = \frac{q_v}{S} = 4 \cdot \frac{q_v}{\pi d^2} = 0,2 \text{ m/s}$$

$$2. Re = \frac{\rho \cdot V \cdot D}{\mu} = \frac{V \cdot D}{\frac{\mu}{\rho}} = 27000$$

2000 < Re < 10⁵ il s'agit d'un écoulement turbulent lisse.

$$3. \text{ On applique la formule de Blasius : } \lambda = 0.316 \cdot Re^{-0,25} = 0,025$$

$$\text{La perte de charge linéaire est : } J_{l2} = -\lambda \frac{V^2}{2} \left(\frac{L}{d} \right) = -0,24 \text{ J/kg}$$

4. On applique le théorème de Bernoulli généralisé entre les points (1) et (2) :

$$\frac{v_2^2 - v_1^2}{2} + \frac{P_2 - P_1}{\rho} + g(z_2 - z_1) = J_{l2} + \frac{P_{net}}{\rho \cdot q_v}$$

$$V_2 = V_1, P_2 = P_1 \text{ donc } P_{net} = \rho \cdot q_v [g(z_2 - z_1) - J_{l2}] = 962 \text{ W}$$

$$5. P_a = \frac{P_{net}}{\rho} = 1202 \text{ W}$$

Commentaire : Nous avons négligé dans cet exercice les pertes de charges singulières.

La prise en compte de ces pertes de charge va induire une augmentation de la puissance de pompage.

Références bibliographiques

1. F.M. White, Fluid Mechanics, Fourth Edition, McGraw-Hill 1998.
2. B. Massey & J. Ward-Smith, Mechanics of Fluids, Eighth edition, Taylor & Francis 2006.
3. Y.A. Çengel & J.M. Cimbala, Fluid Mechanics, Fundamentals and Applications, McGraw-Hill 2006.
4. J.H. Spurk & N. Aksel, Fluid Mechanics, Second Edition, Springer 2008.
5. F. Durst, Fluid Mechanics, An Intro to the Theory of Fluid Flows, Springer 2008.
6. B.R. Munson, D.F. Young, T.H. Okiishi, W.W. Huebsch, Fundamentals of Fluid Mechanics, Sixth Edition, John Wiley & Sons 2009.
7. P. Chassaing, Mécanique des Fluides, Eléments d'un premier parcours, Troisième Édition CEPAD 2010.
8. S. Amiroudine, J.-L. Battaglia, Mécanique des Fluides, Dunod 2011.
9. J.P. Caltagerone, Physique des Ecoulements Continus, Springer 2013.
10. Dynamique des fluides. Inge L. Ryhming Presse Polytechniques et Universitaires Romandes.
11. Mécanique de fluides – Prépas PC-PSI, Céline Anthoine – Guillaume Levèvre – Samuel Marque- 1999.
12. Mécanique des fluides. Cours, exercices et problèmes corrigés. Classes préparatoires- Premier cycle universitaire. Christian Grossetête -1999.
13. A.Ameur, "Mécanique des fluides appliquée à l'eau: principe fondamentaux et exercices corrigés", Edition castilla,2009,ISBN:978.2.7135.3026.5.
14. A, Lencastre, "Hydraulique Générale", Edition Eyrolles. 1996 ISBN : 2212018940
15. BEN HAMOUDA. R, "Notions de mécanique des fluides », Centre de Publication Universitaire, Tunisie.2008 ISBN : 978-9973-37-494-3.
16. Bruce R. Munson, Donald. F. Young, Theodore H. Okiishi et Wade W. Huebsch, "Fundamentals of Fluid Mechanics", sixth edition, John Wiley & Sons, Inc. 2009 ISBN 978-0470-26284-9.
17. Carlier M., " Hydraulique Générale et Appliquée", Collection de la Direction des Etudes et Recherches d'EdF, n°14, 1986, Edition Eyrolles.

- 18.** Clayton T. Crowe, Donald F. Elger, Barbara C. Williams and John A. Roberson, "Engineering Fluid Mechanics», Ninth edition, John Wiley & Sons, Inc. 2009 ISBN 978-0470-25977-1.
- 19.** Comolet, R : "Mécanique expérimentale des Fluides", Tome III : Exercices et Problèmes corrigés. Editions Masson. 1986, ISBN : 2-225-80870-8.
- 20.** R. Ouziaux, J. Perrier : Mécanique des Fluides Appliquée, Dunod, 2004, ISBN : 2100038591.
- 21.** Sakir A, Jean-Luc B, "Mécanique des fluides" Edition Dunod, 2011, ISBN : 978-2-10-056922-9.
- 22.** S. Candel, " Problèmes résolus de mécanique des fluides" "Edition Dunod, 2005, ISBN : 6184594359814.